



TITLE:

熱拡散と剛性の最大化を目的とした熱伝達境界のある熱弾性体の構造最適化( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

伊賀, 淳郎

---

CITATION:

伊賀, 淳郎. 熱拡散と剛性の最大化を目的とした熱伝達境界のある熱弾性体の構造最適化. 京都大学, 2009, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2009-09-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k14940>

RIGHT:

熱拡散と剛性の最大化を目的とした  
熱伝達境界のある熱弾性体の構造最適化

伊 賀 淳 郎

熱拡散と剛性の最大化を目的とした熱伝達境界のある熱弾性体の構造最適化

伊賀淳郎

熱拡散と剛性の最大化を目的とした  
熱伝達境界のある熱弾性体の構造最適化

2009 年

伊 賀 淳 郎

由紀，涼音，瞭太郎へ

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	1
1.1	研究の背景	1
1.2	構造最適化の歴史と分類	3
1.2.1	寸法最適化	4
1.2.2	形状最適化	4
1.2.3	トポロジー最適化	6
1.3	熱拡散問題に対するトポロジー最適化	7
1.4	熱・構造連成問題に対するトポロジー最適化	8
1.5	本論文の構成	9
<b>第2章</b>	<b>形状最適化を用いたエンジンシリンダヘッドの肉厚分布最適化</b>	13
2.1	ヘッド構造と解析モデル	14
2.2	ヘッド燃焼面の肉厚分布最適化問題	18
2.2.1	設計変数の設定	18
2.2.2	最適化問題の定式化	19
2.2.3	最適化アルゴリズム	21
2.3	数値例による提案手法の検証	22
2.3.1	ヘッドの形状最適化	22
2.3.2	実験計画法による初期形状の設定	24
2.4	まとめ	26
<b>第3章</b>	<b>熱伝導問題に対するトポロジー最適化</b>	29
3.1	トポロジー最適化	30
3.2	均質化法に基づくトポロジー最適化	32
3.2.1	固定設計領域の導入	32
3.2.2	均質化法による設計空間の緩和	33
3.2.3	連続的材料分布を仮定した設計空間の緩和方法	40
3.2.4	熱伝導問題の定式化	41
3.2.5	全ポテンシャルエネルギーによる最適化手法の定式化	43
3.2.6	内部発熱の取扱い	45
3.2.7	最適化アルゴリズム	45

3.2.8	感度解析	46
3.3	数値例による提案手法の検証	47
3.3.1	熱流束境界を設定した場合	47
3.3.2	内部発熱を設定した場合	51
3.3.3	熱伝達境界を設定した場合	54
3.4	まとめ	57
<b>第4章</b>	<b>熱伝達問題に対するトポロジー最適化</b>	<b>59</b>
4.1	熱伝達境界を考慮した熱拡散最大化問題の定式化	59
4.1.1	熱拡散問題の定式化	59
4.1.2	物体境界の抽出および熱伝達境界条件の設定方法	61
4.1.3	形状依存性をもつ熱伝達係数の設定方法	64
4.1.4	最適化アルゴリズム	70
4.1.5	感度解析	72
4.2	数値例による提案手法の検証	72
4.2.1	熱伝達係数，熱伝導率の設定と最適構造の関係	73
4.2.2	ヒートパイプ設計	80
4.2.3	熱伝達係数の形状依存性を考慮した最適構造	81
4.3	まとめ	82
<b>第5章</b>	<b>熱・構造連成問題に対するトポロジー最適化</b>	<b>85</b>
5.1	最適化問題の定式化	86
5.1.1	レベルセット法	86
5.1.2	レベルセット法に基づくトポロジー最適化	86
5.1.3	時間発展問題	89
5.1.4	熱拡散および剛性最大化問題の定式化	91
5.1.5	オイラー座標系に基づく変位場の近似解法	92
5.1.6	レベルセット法に基づく温度場における熱伝達境界の取り扱い	93
5.1.7	感度解析	94
5.1.8	最適化アルゴリズム	95
5.1.9	時間発展方程式の数値解法	96
5.2	数値例による提案手法の検証	97
5.2.1	熱を考慮した剛性最大化問題	97
5.2.2	熱・構造二目的最適化問題	100
5.2.3	熱伝達境界を考慮した熱・構造二目的最適化問題	101

---

5.3	まとめ	104
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>105</b>
6.1	本論文の総括	105
6.2	今後の展望	106
<b>参考文献</b>		<b>111</b>
<b>関連学術論文</b>		<b>117</b>
<b>国際会議発表論文</b>		<b>117</b>
<b>口頭発表論文</b>		<b>118</b>
<b>索引</b>		<b>119</b>





## 目次

1.1	Trend of maximum rated power of diesel engines	1
1.2	Trend of light-weighting of diesel engines	2
1.3	Structural optimization methods	4
2.1	Typical cylinder head structure	15
2.2	Distributions of temperature and stress in a cylinder head	15
2.3	Schematic view of stress-strain history during engine operation	16
2.4	Finite element model of a cylinder head	17
2.5	Setting of design variables	19
2.6	Evaluation points of optimization	20
2.7	Flow chart of optimization method	21
2.8	Comparison of minimum principle stress for original and optimal structures	22
2.9	History of optimization	23
2.10	Effect of stress reduction upon optimal structure	23
2.11	Wall thickness distribution of optimal structure	24
2.12	History of optimization	25
2.13	Comparison of stress reduction of optimal structure using MMFD and DOE+MMFD	26
3.1	Characteristic function related to material distribution	31
3.2	Thermal boundary condition for a thermal conductor	33
3.3	Two-scale modeling for the periodic porous body	34
3.4	Microstructure used for the relaxation of design domain	38
3.5	Topology optimization based on the homogenization method	39
3.6	Relationship between normalized homogenized head conduction tensor and normalized density	40
3.7	An arbitrary thermal conductor	42
3.8	Flow chart of optimization method	46

3.9	Design domain for design problem 1. (a) $L_1=0.5, L_2=0.0, L_3=0.5$ , (b) $L_1=1.5, L_2=1.0, L_3=0.5$ , (c) $L_1=5.0, L_2=0.0, L_3=0.5$ , (d) $L_1=5.0, L_2=0.0, L_3=5.0$ .....	48
3.10	History of optimal configuration of design problem 1 (c).....	48
3.11	History of temperature in optimal configuration of design problem 1 (c) .....	49
3.12	Optimal configurations of design problem 1. (a) $L_1=0.5, L_2=0.0, L_3=0.5$ , (b) $L_1=1.5, L_2=1.0, L_3=0.5$ , (c) $L_1=5.0, L_2=0.0, L_3=0.5$ , (d) $L_1=5.0, L_2=0.0, L_3=5.0$ .....	50
3.13	Convergence history of design problem 1. (a) $L_1=0.5, L_2=0.0, L_3=0.5$ , (b) $L_1=1.5, L_2=1.0, L_3=0.5$ , (c) $L_1=5.0, L_2=0.0, L_3=0.5$ , (d) $L_1=5.0, L_2=0.0, L_3=5.0$ .....	50
3.14	Design domain for design problem 2 .....	52
3.15	Optimal configurations of design problem 3. (a) without dependency on design variables (b) with dependency on design variables .....	52
3.16	Convergence history of design problem 2 .....	53
3.17	Design domain for design problem 1. (a) $h_1=1.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb1}=0^\circ\text{C}, h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb2}=100^\circ\text{C}$ (b) $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb1}=0^\circ\text{C}, h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb2}=100^\circ\text{C}$ (c) $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb1}=0^\circ\text{C}, h_2=1000.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb2}=100^\circ\text{C}$ .....	55
3.18	Optimal configurations of design problem 3. (a) $h_1=1.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb1}=0^\circ\text{C}, h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb2}=100^\circ\text{C}$ (b) $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb1}=0^\circ\text{C}, h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb2}=100^\circ\text{C}$ (c) $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb1}=0^\circ\text{C}, h_2=1000.0\text{W/m}^2\text{K}, T_{amb2}=100^\circ\text{C}$ .....	55
3.19	Convergence history of design problem 3 .....	56
4.1	Result of cantilever beam optimization .....	61
4.2	Method for dealing with structural boundaries .....	62
4.3	Hat function and smeared-out Hat function .....	63
4.4	Schematic view of setting method of heat transfer coefficients .....	64
4.5	Velocity and heat transfer coefficient distribution in rectangular pipe .....	65
4.6	Setting of numerical fluid simulation .....	67
4.7	Material density in a numerical fluid simulation model .....	68
4.8	Surrogate model with respect to normalized heat transfer coefficients using the Radial Basis Function .....	70
4.9	Flow chart of optimization method .....	71
4.10	Design domain for design problem 3. (a) boundary condition during the first $N_T$ iteration, (b)	

---

boundary condition from $N_T + 1$ iteration .....	73
4.11 History of optimization for design problem 3 .....	75
4.12 Extracted structural boundary for design problem 3 .....	75
4.13 Optimal configurations of design problem 3. (a) $\varepsilon = 0.1$ , (b) $\varepsilon = 0.001$ .....	76
4.14 Relationship between optimal configurations and number of iteration when the imposed temperature boundary condition is removed .....	77
4.15 Influence of heat transfer coefficients and thermal conductivities on optimal configurations. (a) $h_0 = 0.01 \text{ W/m}^2\text{K}$ , (b) $h_0 = 0.1 \text{ W/m}^2\text{K}$ , (c) $h_0 = 1 \text{ W/m}^2\text{K}$ and (d) $h_0 = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ .....	78
4.16 Schematic view of steady state heat transfer phenomenon with heat convections .....	78
4.17 Relationship between thermal conductivity and heat transfer coefficient shown in optimal configurations .....	79
4.18 Design domain for design problem 4 .....	80
4.19 Optimal configurations of design problem 4. (a) $h_0 = 10.0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , $T_{amb} = 0^\circ\text{C}$ , (b) $h_0 = 1.0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , $T_{amb} = 0^\circ\text{C}$ , (c) $h_0 = 0.1 \text{ W/m}^2\text{K}$ , $T_{amb} = 0^\circ\text{C}$ .....	81
4.20 History of optimization of design problem 3, considering shape dependencies with respect to heat transfer coefficients .....	82
5.1 Fixed design domain $D$ and level set function $\phi$ .....	87
5.2 Flowchart of optimization method .....	96
5.3 Design domain for design problem 1 .....	98
5.4 Optimal configurations of design problem 1. (1) $q = 0 \text{ W/m}^2$ , (2) $q = 7 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$ , (3) $q = 1 \times$ $10^{-4} \text{ W/m}^2$ , (4) $5 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ .....	99
5.5 Optimal configurations of design problem 2. (1) $w = 0.0$ , (2) $w = 0.1$ , $w = 0.5$ , $w = 1.0$ .....	100
5.6 Design domain for design problem 3 .....	101
5.7 Optimal configurations of design problem 3 .....	103



## 表目次

2.1	Material properties of gray cast iron .....	18
-----	---	----



## 記号一覧

$A$	area
$a_j$	interpolation expansion coefficient
$b$	internal heat generation
$Bi$	Biot number
$b^h$	descretized internal heat generation
$D$	fixed design domain
$E$	elastic tensor
$F$	total potential energy
$\bar{F}$	lagrangian
$g$	volume
$g_j$	radial basis function
$h$	heat transfer coefficient
$h^h$	descretized heat transfer coefficient
$h_0$	nodal heat transfer coefficient
$\mathbf{h}$	vector of heat transfer coefficient
$H$	Heaviside function
$H_a$	Hat function
$\mathbf{H}$	heat transfer vector
$H^1$	Sobolev space
$K$	coefficient of heat transmission
$\mathbf{K}$	thermal conduction matrix
$\mathbf{K}_h$	heat transfer matrix
$l$	length
$n$	the total number of nodes
$N_f$	the number of cycle to crack
$N_i^r$	shape functions
$Nu$	Nusselt number



$m$	position of sampling points
$\mathbf{N}^r, \mathbf{M}^r$	vector of shape functions
$P$	fin period
$Pr$	Prandtl number
$q$	heat flux
$\mathbf{q}$	heat flux vector
$q_{react}$	reaction of applied heat flux
$\mathbf{Q}$	internal heat generation vector
$r$	design variable
$r^h$	descretized design variable
$\mathbf{R}$	vector of nodal design variables
$Re$	Reynolds number
$R_i$	design variables on nodes
$S$	area
$t$	time
$T$	temperature
$\mathbf{T}$	temperature vector
$\tilde{T}$	virtual temperature
$T_{mean}$	mean temperature
$\mathbf{u}$	displacement field
$\mathbf{v}$	virtual displacement
$T_{amb}$	ambient temperature
$V_{max}$	upper limit of volume constraint
$w$	weighting factor
$\mathbf{x}$	position in the fixed design domain
$\mathbf{y}$	position in the micro structure
$Y$	unit cell area

#### Greek symbols

$\alpha$	thermal expansion coefficient
$\delta$	Kronecker delta

---

$\Gamma_c$	temperature boundary
$\Gamma_{fin}$	fin boundary
$\Gamma_h$	heat convection boundary
$\Gamma_q$	heat flux boundary
$\Gamma_t$	temperature boundary
$\Gamma_u$	displacement boundary
$\varepsilon$	size of bandwidth in Hat function
$\varepsilon_{mechanical}$	mechanical strain
$\phi$	level set function
$\kappa$	thermal conduction tensor
$\kappa^H$	homogenized thermal conduction tensor
$\lambda$	thermal conductivity
$\lambda_m$	lagrange multipliers
$\rho$	node density
$\rho_e$	element density
$\sigma$	chaucy stress
$\sigma_t$	stress including thermal stress
$\xi$	characteristic temperature filed
$\chi_\Omega$	characteristic function
$\Omega_d$	original design domain



## 第 1 章

### 序論

#### 1.1 研究の背景

内燃機関の環境への高度な調和や更なる高効率化や高出力化の要望に対して、シリンダヘッドなど重要部品の機能設計による品質の向上がますます重要になってきている。特に船用ディーゼルエンジンに代表される産業用エンジンでは燃料として軽油より低質な重油も使用されるため、燃焼性能やエミッション性能だけでなく、産業用エンジンとして信頼性や耐久性が求められている。

産業用ディーゼルエンジンは、船用主機関やパワーボートなどのマリン分野、各種作業機の原動機などの産業機械分野から、分散型発電システムなどに代表されるエネルギー分野まで幅広い分野で利用されている。このディーゼルエンジンに求められる基本性能は、低燃費でクリーンな燃焼性能を追求し地球環境との調和を目指すとともに、長年の実績、ノウハウに加え、近年急速に発展している数値シミュレーション技術などを結集して、優れた耐久性をはじめ、軽量コンパクトで高出力、高速化を実現することにある。

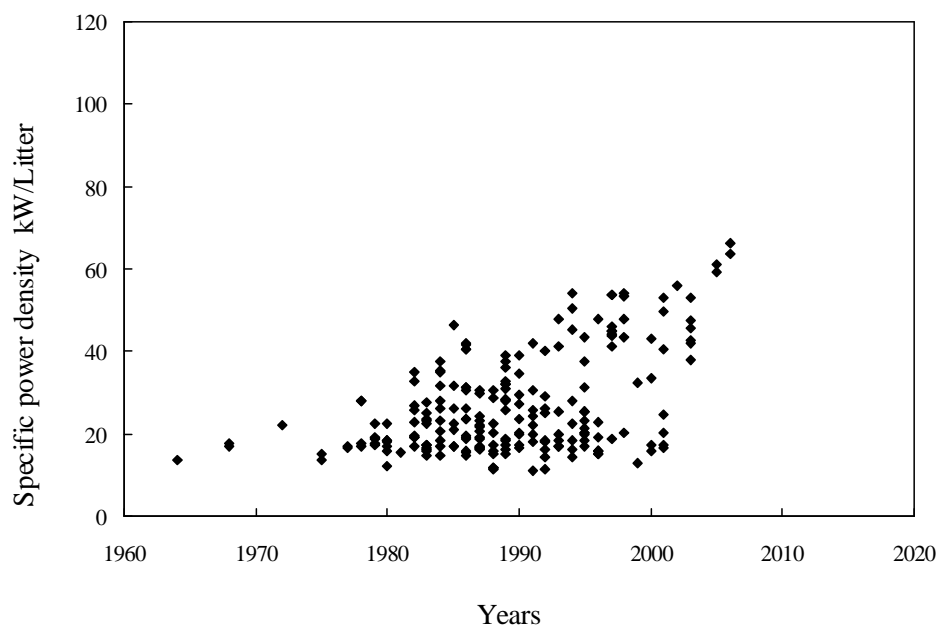


Fig.1.1 Trend of maximum rated power of diesel engines

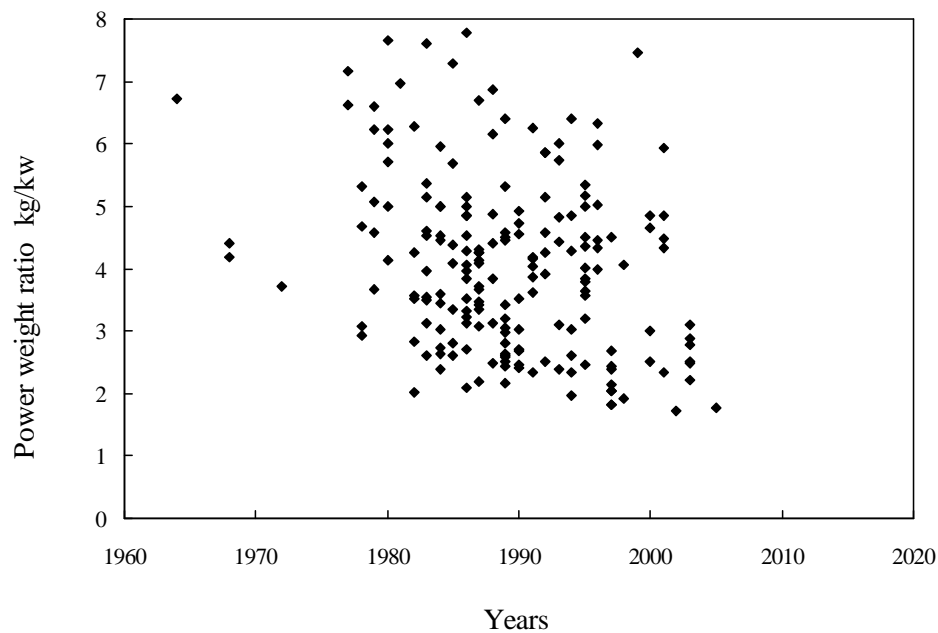


Fig.1.2 Trend of light-weighting of diesel engines

図 1.1 および図 1.2 には、船用ディーゼルエンジンの高出力化および軽量化の年代推移を示す。過給機などの高性能化に加え、可変機構やコモンレールなどのデバイスの出現により、近年急速に軽量高出力化が進んでいる。現在、エンジンの最高筒内圧力は 15MPa～20MPa にまで達している。そのためエンジン部品には、このような非常に厳しい機械荷重に抗し得る剛性の確保が求められる。一方、燃焼室を構成するシリンダヘッド、ピストンやシリンダライナは運転中に 2000℃を超える燃焼ガスにさらされている。実際の産業用ディーゼルエンジンの場合、シリンダヘッドなどの高熱負荷部品の設計に対しては、信頼性・耐久性を重視し機械荷重に対する疲労安全率に加えて温度に対しても設計規準を設けている。しかし、実際の開発段階での過酷な耐久試験などでは、繰り返し負荷される厳しい熱や機械荷重などにより、シリンダヘッドなどに亀裂が発生することがある。この亀裂は、ウォータハンマーや焼きつきなどの重大故障の原因となるためエンジンの耐久性上問題である。また、シリンダヘッドの高熱負荷は、弁・弁座の摩耗やガス吹き抜けなどとも密接に関係しており、エンジンの耐久性を決める大きな要因となっている。したがって、シリンダヘッドなどの高熱負荷部品の設計に対しては、機械荷重に対する疲労損傷や、熱ひずみ増加による熱疲労寿命低下や過度な熱変形を避けるために、温度分布や剛性分布の観点から、最

適な構造や形状を検討する必要がある。しかし、機械荷重に対する剛性の確保と温度低減のための熱抵抗低減はほとんどの場合において相反する要求となるうえ、エンジンの軽量化によりその剛性は年々に低くなっているため、これらの要求を同時に満足させる設計解を得ることは非常に難しくなっている。それゆえ上述の問題を解決するためには、最適設計手法の援助が不可欠になっている。

このような問題を解決する方法として、構造最適化の利用が考えられる。構造最適化は、力学的観点と数学的な最適化手法に基づき、構造物の最適な形態や形状を求める方法で、対象とする複数の性能を向上可能な設計案を合理的に導くことが可能であり、上記の課題を解決する方法として有望視されている。

エンジン部品の中でも、シリンダブロックや連接棒など、主に機械荷重のみを考慮する部品の設計に対しては、すでに形状最適化手法が適用されており、市販のソフトウェアも普及・活用されている。しかし、シリンダヘッドなどの熱の影響を考慮する必要のある部品に対しては、主な研究対象は、熱疲労寿命の予測や高温領域における材料モデルの構築に主眼がおかれている[1][2]。すなわち、熱を考慮した構造最適化については、最適化における熱の取扱いが難しいため、これまでほとんど研究がなされていないのが現状である。

そこでまず、これまで研究されてきた構造最適化手法に関する過去の研究の流れをまとめ、本研究の目的とその位置付けを明確にする。

## 1.2 構造最適化の歴史と分類

構造最適化を中心とした最適設計の方法を大別すれば図 1.3 に示すように、寸法最適化、形状最適化、トポロジー最適化の 3 種類に分類される。

寸法最適化は、最も簡単な構造最適化の手法である。図 1.3(1)に示すように、板厚最適化や梁の断面寸法最適化に代表されるように、形状やトポロジーは固定した状態で構造物の寸法を最適化することを主な目的としている。形状最適化は、構造物の外形そのものを設計変数として最適化する方法である。形状最適化は、滑らかで具体的な外形状が得られるので、寸法最適化と比較してより高い性能が期待できる。但し、最適化の過程でトポロジーが変化することはない。すなわち新たな部材を創成したり、構造物内部に新たな穴ができることはない。これに対してトポロジー最適化は、あらかじめ固定設計領域を定め、そ

の領域内で最適な材料配置を求める方法である．そのため，性能を抜本的に改善したり，従来にはなかった形態を創出できる可能性がある．ここではまず，上述の最適化手法の特徴と歴史を述べた後，本論文で述べる，熱問題への適用について述べる．

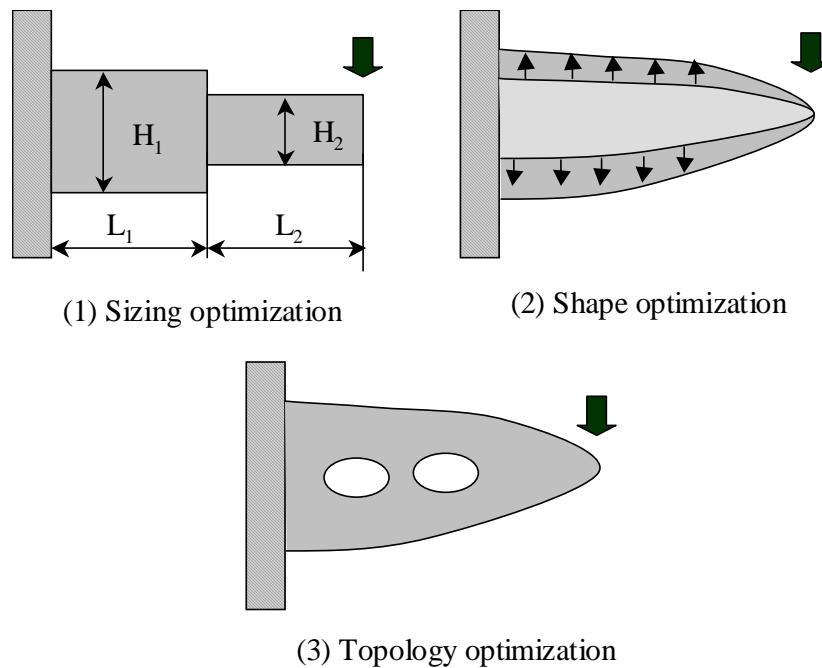


Fig.1.3 Structural optimization methods

### 1.2.1 寸法最適化

寸法最適化は，最も簡易な構造最適化の方法で，1962年に Schmit [3] により提案された．この手法では，対象とする構造に対して，向上をねらった性能を目的関数に，その性能向上を行うために変更可能な設計寸法を設計変数とし，機械的あるいは幾何学的な条件などを制約条件として最適化問題を定式化し，数学的な最適化手法を用いて最適化を行う．基本的には，梁の長さや高さのような機械的あるいは構造的な寸法を設計変数として最適化を行う場合が多い．

### 1.2.2 形状最適化

形状最適化は，構造物の外形形状そのものを設計変数として最適化を行う手法であり，1973年に Gallagher と Zienkiewicz [4] によって最適設計の分野に有限要素法を導入することにより提案された．形状最適化は，寸法最適化と比較して設計変数により高い自由度を持

つので、より高い性能をもつ構造が得られる可能性が高い。しかし、形状最適化は波打ち現象などの数学的な問題も多く含み、その後の発展においてはそれらの問題の解決が中心的な研究対象となった。なお、波打ち現象とは、最適設計時に有限要素モデルの境界上の節点を設計変数として選択すると、節点を結ぶ形状が波を打ったような形状になってしまう現象である。

形状最適化が持つ問題点は、構造の形そのものが設計変数であるということに起因する。そのため、構造物の有限要素モデルを最適化の途中で変更することが必要となる。形状の変更が比較的小さい場合には、外形形状のコントロールポイントの配置を変更することで有限要素モデルの節点がつりあいを保ちながら移動し、有限要素の凸性が保護されるため、感度解析や適切な最適化手法によって問題を解くことができる。しかし形状の変化が大きい場合は、要素が極端に歪んでしまい、大きな近似誤差が生じてしまうという問題点を持つ。

この問題を解決するために、Bennett と Botkin [5] は、アダプティブメッシュとスプライン近似を基礎においた手法を提案しているが、方法論があまりにも複雑なため、あまり普及していない。また Imam は、基底ベクトル法 [6] を提案している。この方法は、最適形状は複数の形状基底ベクトルの重み付き総和で表されることを前提に最適構造を得る。そのため上述の波打ち現象は生じない。さらに、基底ベクトルを、仮想荷重を作用させた場合の構造の変位モードで与える方法 [7] も提案されている。さらに Azagami [8] は、変位コントロールを荷重負荷問題に変換した手法と呼ばれる手法を提案している。この解法は、境界値問題が定義されている領域を線形弾性体とみなして、形状変動に関する拘束条件下で、形状勾配関数に負号を付けた値を表面力として作用させたときの変位場を速度場として得る方法である。この手法は現在までに、線形弾性問題 [8]、固有振動問題 [9]、周波数応答問題 [10] など、工学的問題に広く適用されている。

このように形状最適化は、有限要素モデルで構造を表現し、各要素の節点を最適化手法により移動させることで、外形形状を変更し最適構造を得ることが可能なため、エンジン鋳物部品のような複雑形状を有する構造に対しても、適用しやすいという利点がある。しかし、形状最適化では有限要素モデルに関わるあらゆる物理量を取り扱うことができる反面、設計領域のトポロジーまでは変えることができないため、抜本的な改善が行われない



という可能性がある．さらに，いずれの方法論も，熱，構造，振動など単一の現象を対象としており，シリンダヘッドの熱応力問題のように，形状変化に伴う温度変化を考慮した最適化手法の検討はなされていない．また，有限要素法を用いたシリンダヘッドの耐久性予測手法や最適化に関する研究もこれまで行われているが，現象や構造の複雑さのため十分な検討ができているとは言い難い．

### 1.2.3 トポロジー最適化

構造最適化の中で，トポロジー最適化が，性能の抜本的改善が可能で，もっとも自由度の高い方法であるとされている．トポロジー最適化は，構造最適化問題を，指定した固定設計領域の中での材料配置問題に置き換えることにより，最適構造を求める手法である．1988年に，Bendsøe と Kikuchi [11] により提唱されて以来，多くの工学的問題に適用されており，剛性最大化問題 [12] をはじめ，固有振動数最大化問題 [13] [14]，ピエゾ素子アクチュエータ設計 [15] [16] やコンプライアントメカニズム設計 [17] [18] など多くの分野に適用されている．さらに近年では，熱拡散問題や熱アクチュエータ設計 [19] の分野への適用についても報告されている．

トポロジー最適化の基本的な考え方は，最適構造を示す拡張された固定設計領域  $D$  と次式に示す特性関数  $\chi_\Omega$  の導入にある．

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで， $\Omega_d$  は求めるべき本来の設計領域を示す．この固定設計領域  $D$  において，特性関数  $\chi_\Omega$  を用いて材料の有無を示せば，任意のトポロジーを持つ構造を表現することができる．しかし，この特性関数はいたるところで不連続な点を持つ可能性がある．この問題を解決する方法として，基本的な分類として，均質化法に基づいた方法論 [11]，密度法あるいは SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization)法 [20] に基づいた方法論，などがあり，このうち均質化法および SIMP 法が主流となっている．

一方 ESO(Evolutionary Structural Optimization)法 [21] は，最初に固定設計領域  $D$  を有限要素分割しておき，応力制約などの制約条件をもとに unnecessary 要素を除去し，形状をより良い方向に発展的に変化させる方法である．

### 1.3 熱拡散問題に対するトポロジー最適化

上述のように，トポロジー最適化は，構造最適化問題を固定設計領域内の材料配置問題に置き換えることにより，構造の形態変化をも許容でき，最適構造を創出できる利点をもつ．トポロジー最適化の熱拡散問題への適用については，場の方程式の単純性により，1980年代に均質化法に基づいた基本理論の確立を目的に，多くの研究 [22] [23] [24] がなされている．さらに Li ら [25-27] は ESO(Evolutionary Structural Optimization)法を熱拡散問題に拡張している．しかし，これらの研究の重点は数学的な理論の構築に置かれ，工学的応用の検討はされていない．その後，均質化法に基づいた方法の他に，SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization)法に基づいた方法論 [28] [29] が提案されたが，いずれの方法論においても，設計空間の緩和においては有限要素内で材料密度を一定と仮定し，要素間での不連続な材料分布を許容している．そのため，チェッカーボードなどの数値的な問題を生じる可能性をもっているうえ，熱分布にアンダーシュートやオーバーシュートが生じる問題点が指摘されている．特に，内部発熱を伴う問題では，内部発熱量も設計変数とともに変化するため，この数値不安定性の問題は顕著になるうえ，実際の発熱量との相違も生じると考えられる．近年，Gersborg-Hansen ら [30] は，有限体積法に基づいたトポロジー最適化の方法を提案しているが，設計空間の緩和には SIMP 法を用いており，上に示した数値的な問題を生じる可能性をもつ．これに対して，Matsui と Terada [31] や，Rahmatalla と Swan [32] は上述の数値的な問題を克服する方法として，構造問題を対象に，材料分布の連続性を仮定したトポロジー最適化を提案しているが，熱拡散問題への適用・検討はされていない．

さらに熱拡散問題においては，物体の表面への熱伝達境界条件の設定を必要とする問題が存在する．従来までに提案されている熱拡散問題に対するトポロジー最適化手法では，固定設計領域の境界上に，熱流束や温度を設定する境界条件を前提とした最適化問題のみを対象としている．これは，従来のトポロジー最適化によって得られる最適構造が，設計領域の密度分布として表現されるため，明確な外形形状を表現できなく，そのため熱伝達境界条件などのように，最適構造を示す領域の境界（以後物体境界と記す）を必要とする境界条件については，取り扱うことが難しいためである．

上述の物体境界への境界条件設定に関する問題に対し，構造問題を対象とし，物体境界に圧力荷重が作用する問題について，Chen と Kikuchi [33]，Sigmund と Clausen [34] や

Bourdin と Chambolle [35] は、直接、物体境界に圧力荷重を作用させるのではなく、非構造部分に仮想的な流体要素を配置し物体境界に圧力荷重を作用させる方法を提案している。しかし、この方法は、圧力荷重が作用する問題に特化した方法で、熱拡散問題への適用は難しい。さらに設計変数依存性を考慮した荷重条件設定の事例として、重力荷重が作用した場合の構造最適化についての報告事例もある[36] [37]。

これに対して、Yoon と Kim [38] は、物体境界への境界条件設定方法の熱拡散問題への適用として、要素間の結合性を節点間に配置したリンク要素で表し、これを設計変数として最適構造を求める ECP(Element Connectivity Parameterization)法を提案しているが、この方法は連続体力学との理論的整合性がないなどの問題点を持っている。さらに Ryu と Kim [39] は、設計変数依存性を有した形状関数を用いて、これにより生じる要素間の温度分布の不連続性を利用した熱伝達境界の抽出および熱伝達係数の設定方法を提案している。また、Bruns [40] は、隣接する要素密度の差によって物体境界を抽出する方法を提案している。しかしいずれの方法論も、熱伝達係数は構造表面上で一定と仮定しており、形状変化により生じる熱伝達係数の局所的な変化を考慮することはできていない問題点をもつ。このように、トポロジー最適化においては、構造表面への熱伝達条件の設定方法について、抜本的な解決がされているとは言い難い。

他方、近年新しいトポロジー最適化の方法として、レベルセット法に基づいた方法論 [41] [42] が提案されている。この方法は、スカラー場であるレベルセット関数場の等位面を用いて、物体の外形形状を陰的に表現し、レベルセット関数を更新させることにより、最適化過程における、形状の更新を表現する方法である。この方法においては、陰的ではあるが明確な境界が存在するため、設計境界上に物理的な境界条件を課することが可能になるため、上述の物体境界への境界条件設定に対する問題を抜本的に解決できる可能性を持つ。

## 1.4 熱・構造連成問題に対するトポロジー最適化

これまで述べてきたように、トポロジー最適化は、熱拡散最大化問題のほか、剛性最大化問題 [12]、固有振動数最大化問題 [13] [14] など多くの問題に適用されている。しかし、従来までの方法では、熱拡散、剛性もしくは振動特性などの単一の現象のみを取り扱って

おり，温度低減と剛性向上を同時に考慮する必要があるような設計問題に関する研究事例は少ない．

近年，Xia と Wangha [43] は，レベルセット法を用いて，熱を考慮した剛性最大化を目的とした最適化手法を提案している．しかし，熱の影響については，固定設計領域全体に均一の温度差を与えているのみであり，より現実的な温度分布を考慮するためには，熱流束などの熱境界条件を持つ熱伝導方程式を解き，その結果に基づいた温度場による熱変形を検討する必要がある．さらに，物体境界における熱伝達条件についての検討も行われておらず，加熱や冷却条件といった実際の熱の授受を考慮した構造最適化はできない上，温度低減と剛性向上を同時に検討する必要があるような問題に対しても検討がなされていない．

また，従来までに提案されているレベルセット法に基づく構造最適化 [41] [42] と同様に，レベルセット関数の更新をハミルトンヤコビ方程式に帰着して行うため，設計領域に穴が創出されるような形態変更が許容されないという問題点を持つ．これに対して Yamada ら [44] は，構造の形態変更を可能とする方法として，レベルセット関数の更新を反応拡散方程式に帰着して行う新しいトポロジー最適化の方法を提案している．この方法では，目的汎関数にレベルセット関数の勾配項を付与することにより，最適化の過程において，設計領域内に仮想的な界面エネルギーを与え，その大きさを設定することにより，最適構造の複雑度を陰的に設定可能な特長をもち，過度に複雑な構造が除かれた工学的に有効な最適構造を創成することができるという特徴がある．熱拡散最大化問題においては，メッシュサイズによっては過度に複雑化した最適解が得られる場合があることが報告されている [30]．物理的な妥当性を維持しながら，工学的に有効な設計解を得るためには，このような複雑な構造を除く必要があり，上述の手法はこの問題を解決できる可能性を持つ．

## 1.5 本論文の構成

機械製品に対する，更なる高性能化や軽量化の要望は今後も続くと考える．これらの要望に対して，信頼性・耐久性に対する要求は変わることはないため，今後，ますます高性能化・軽量化と信頼性・耐久性のより高い次元での両立が求められる．したがって，製品設計においては，より高度な解析技術や設計手法が要求され则认为る．

本論文においては，構造最適化手法において，熱の影響を受ける機械構造物に対しても

適用可能な，新たな計算手法を提案する．またその手法を用いた熱弾性体の，熱応力最小化，熱拡散最大化および熱拡散と剛性の同時最大化を目的とした構造最適化技術を構築する．そして，それぞれの提案手法において，いくつかの簡単な数値例を示し，その有効性を示す．

本論文は，6 章から構成されており，次章以下の概要を示す．

第 2 章「形状最適化を用いたエンジンシリンダヘッドの肉厚分布最適化」では，シリンダヘッドなどのエンジン鋳物部品のように，自由局面を有する複雑形状部品を対象として，最適化により更新される形状の変化に対応した温度分布を考慮可能な形状最適化手法を構築する．まず，対象とするシリンダヘッドについて説明した後，最適化における形状アップデートに適用したメッシュモーフイング技術について述べる．この方法と，有限要素法および最適化アルゴリズムの組合せにより，熱応力最小化問題に対する形状最適化手法を構築する．そして，本手法をシリンダヘッドの熱応力最小化問題への適用し，本章で提案する方法論の妥当性を検証する．

第 3 章「熱伝導問題に対するトポロジー最適化」では，熱伝導体の性能を，形態変化も含めて改善することを目的として，熱拡散問題に対するトポロジー最適化を構築する．まず，トポロジー最適化における設計空間の緩和に用いた均質化法について説明し，これを用いた連続的材料分布を仮定した固定設計領域の緩和法について述べる．さらに，全ての熱的境界条件に対して目的関数の最大化問題として扱える全ポテンシャルエネルギーを用いて，新しい構造最適化手法を提案する．そして，簡単な熱伝導問題に関する数値例により，本章で提案する方法論の妥当性を検証する．

第 4 章「熱伝達問題に対するトポロジー最適化」では，第 3 章で述べた構造最適化手法を，固定設計領域内に存在する物体境界上の熱伝達境界条件を考慮可能な手法に拡張する．まず，近似 Hat 関数を用いた固定設計領域内に存在する物体境界の抽出方法を説明した後，その境界上へ設定する熱伝達条件を定式化する．さらに，熱伝達係数の形状依存性を考慮するための代理モデルを構築し，物体境界の形状に依存した熱伝達条件の設定方法を提案する．この最適化問題を解く方法として，均質化法と逐次線形計画法を基にしたトポロジー最適化アルゴリズムを構築し，簡単な数値例により，本章で提案する方法論の妥当性を検証する．

第 5 章「熱・構造連成問題に対するトポロジー最適化」では，熱弾性体の熱拡散と剛性の同時最大化を目指す，二目的構造最適化手法を提案する．まず，本手法で適用したレベルセット法による形状表現および形状のアップデートの方法について述べる．これを熱・構造連成問題に適用し，熱，構造の各々の全ポテンシャルエネルギーに重み付け総和法を適用することで目的関数を定式化し，熱拡散および剛性の双方の影響を考慮した構造最適化手法を提案する．そして，簡単な数値例により，その有効性を検証する．ここでは，従来の機械荷重に対する剛性最大化の考えに加えて，構造物の温度低減の考え方を導入することにより，構造物の剛性向上と温度低減の両方の要求を満足する構造を創出できる手法の提案を目指している．

第 6 章「結論」では，本研究で得られた成果と今後の展開・課題をまとめる．



## 第 2 章

# 形状最適化を用いたエンジンシリンダヘッドの肉厚分布最適化

構造最適化の中で、性能の抜本的改善が可能で、もっとも自由度の高い方法として、トポロジー最適化が提案されている。この方法は、構造最適化問題を、固定設計領域内の材料配置問題に置き換えることにより、構造の形態変化をも許容でき、最適構造を創出できる利点を持ち、剛性最大化問題 [12]、固有振動数最大化問題 [13] [14] など多くの問題に適用されている。トポロジー最適化の熱拡散問題への適用 [22] [23] [24] についても研究がなされている。しかし、現時点では、エンジン部品の 1 つであるシリンダヘッド（以下、ヘッド）のような複雑形状を有する鋳物部品への適用に対しては、応力問題への適用の困難さや計算時間の観点から、実用上難しいという問題点を持つ。一方、形状最適化手法として、力法 [8]、基底ベクトル法 [6] などが提案されており、工学的問題に広く適用されている。力法は、外形形状を変動させる感度を、線形弾性問題の境界値問題より求める方法であり、有限要素メッシュを利用して最適形状を求めることができるという利点を持つ。基底ベクトル法は、形状を複数の基底形状ベクトルの線形和で表現し、各基底形状ベクトルの重みを最適化することにより最適形状を求める方法である。これらの方法論は基本的にはノンパラメトリック最適化手法であるため、設計変数の定義が容易であるという利点を持つが、いずれの方法論も、熱、構造、振動など単一の現象を対象としており、ヘッドの熱応力問題のように、形状更新に伴う温度変化を考慮した最適化手法の検討はなされていない。また、有限要素法を用いたヘッドの耐久性予測手法や構造最適化に関する研究もこれまで行われているが、現象や構造の複雑さのため十分な検討ができていたとは言い難い。

そこで本章では、以上の問題点を克服するために鋳物部品のような自由局面を有する複雑形状部品を対象として、形状依存性をもつ温度分布を考慮可能な形状最適化手法を構築する。以下では、対象とするヘッドについて説明した後、最適化における形状アップデート方法として、メッシュ品質の維持を目的としたモーフィング技術の適用について述べる。この方法と、有限要素法と最適化アルゴリズムの組合せにより、熱応力問題に対するパラ



メトリック形状最適化手法を構築する．さらに，本手法の有効性を検討するため，実際のヘッドへの適用例について述べ，その結果の妥当性について検討する．

## 2.1 ヘッド構造と解析モデル

図 2.1 にディーゼル機関のヘッド構造の 1 例を示す．本章では，吸気 2 弁，排気 2 弁の 4 弁式ヘッドを対象としている．

ヘッドは燃焼室の一部を構成するとともに動弁機構や吸排気機構などの機能を有しており，機関部品の中で最も複雑でかつ重要な部品である．

ヘッドの疲労損傷に対しては，熱ひずみ増加および高温使用での材料強度低下を避けるために部品温度を低減するとともに，熱応力集中を避けるために構造や形状を検討する必要がある．特に燃焼面の排気弁と吸気弁の間（以後，弁間部と記す）は，高温かつ構造的に応力集中しやすい部位であり，クラック発生に対して注意が必要である．弁間部を効率よく冷却し，ひずみを低減するために，エンジン冷却水の流れシミュレーションや構造解析を行い，適正な燃焼面肉厚や冷却水流れの分布を検討することが，ヘッドを設計する上で重要な課題となっている．

燃焼面の弁間部に発生する，熱に起因するひずみ  $\varepsilon_{mechanical}$  は，

$$\varepsilon_{mechanical} = K_{constraint} \alpha \Delta T \quad (2.1)$$

と書くことができる．ここで， $\alpha$ ， $\Delta T$ ， $K_{constraint}$  は，ヘッド材料の線膨張係数，運転中と停止時の部材の温度差，ヘッド構造に起因する拘束率を示す．上式に示すように，ひずみを低減するためには，温度差を低減することが最も有効であり，これまでも温度低減方策として，例えば，エンジン冷却水流量の増加による冷却能力の向上や，肉厚を薄肉化することで熱抵抗を低減する手法などがとられている．しかし，現時点では，このような対策は，流量増による機械損失の増加や薄肉鑄造技術など，克服すべき問題が多い．

一方式(2.1)に示すように，ひずみは，ヘッド構造に起因した拘束率を低減することによっても低減が可能である．運転中の温度分布によるヘッドの熱膨張は，ヘッドの肉厚分布や，ボルトや燃料弁ボス部などにより拘束される．そのため，ヘッド構造の剛性分布を最適化し，ヘッド弁間部などの危険箇所の熱膨張をコントロールすることで，発生するひずみを抑制し，熱疲労寿命向上させることが可能である．

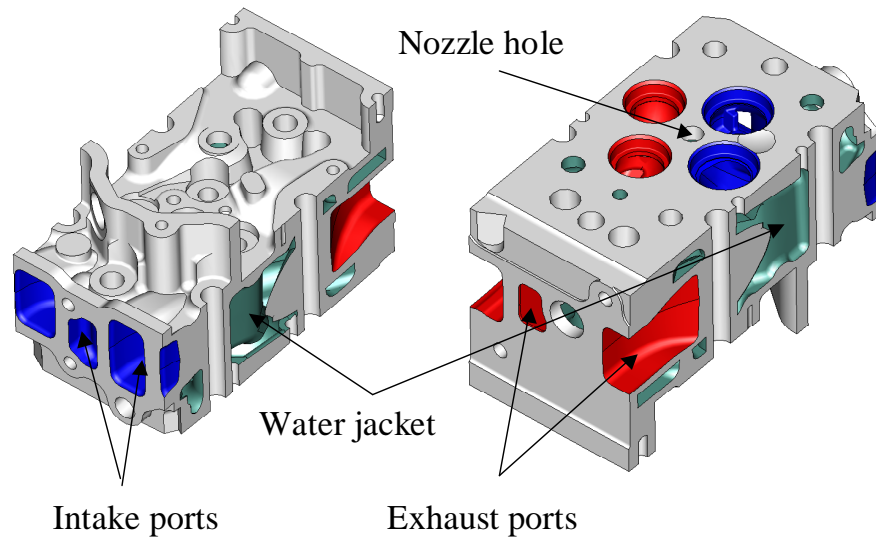


Fig.2.1 Typical cylinder head structure

ヘッドの燃焼面の弁間部には、鋳造時の残留応力，締め付け時に発生する応力に加え，運転時には筒内圧力や温度による応力が発生する．特に熱応力は，残留応力，組み付け時や筒内圧力による応力にくらべ 10 倍以上大きいことが報告されている[45]．したがって，ヘッドの耐久性を向上するには，運転中の熱応力を低減することが最も重要である．

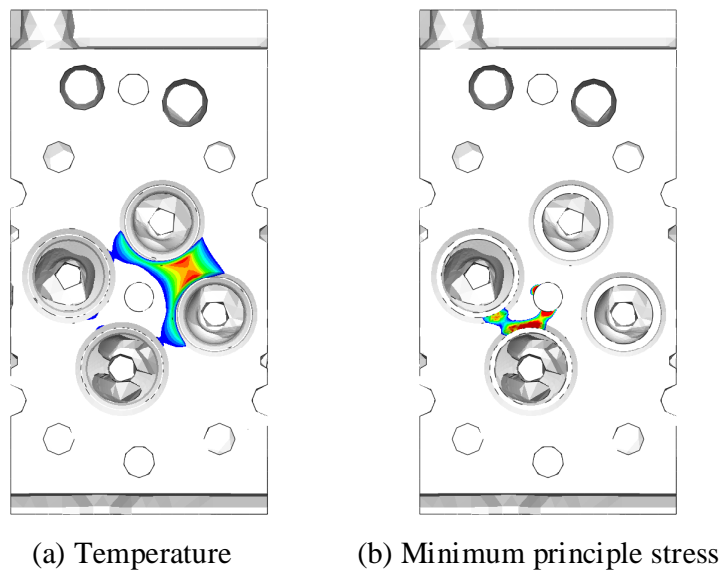


Fig.2.2 Distributions of temperature and stress in a cylinder head

図 2.2 に、ヘッドの温度分布と熱による最小主応力分布の解析例を示す。通常、ヘッド燃焼面は熱膨張がヘッド構造により拘束されることから圧縮場となる。特に図に示すようにヘッド燃焼面では、弁間や弁ノズル孔間のように最も断面積が小さくなる箇所に熱応力が集中する。

図 2.3 に、エンジンの起動から稼動時にかけてヘッド弁間部に発生する応力ひずみ挙動の概念図を示す。エンジンの起動と同時に部品温度は上昇し、それに伴い熱変形が増加する。しかし実際には熱変形はヘッド構造により拘束されるため、圧縮の熱応力が温度上昇に伴い増加する。その後、エンジンを停止することで部品温度が低下し、ひずみと応力も同様に減少する。このような熱の影響がエンジンの発停により繰り返し負荷されることにより生じるヘッド燃焼面の疲労亀裂は、Out-of Phase タイプの疲労現象であると言われている [1]。

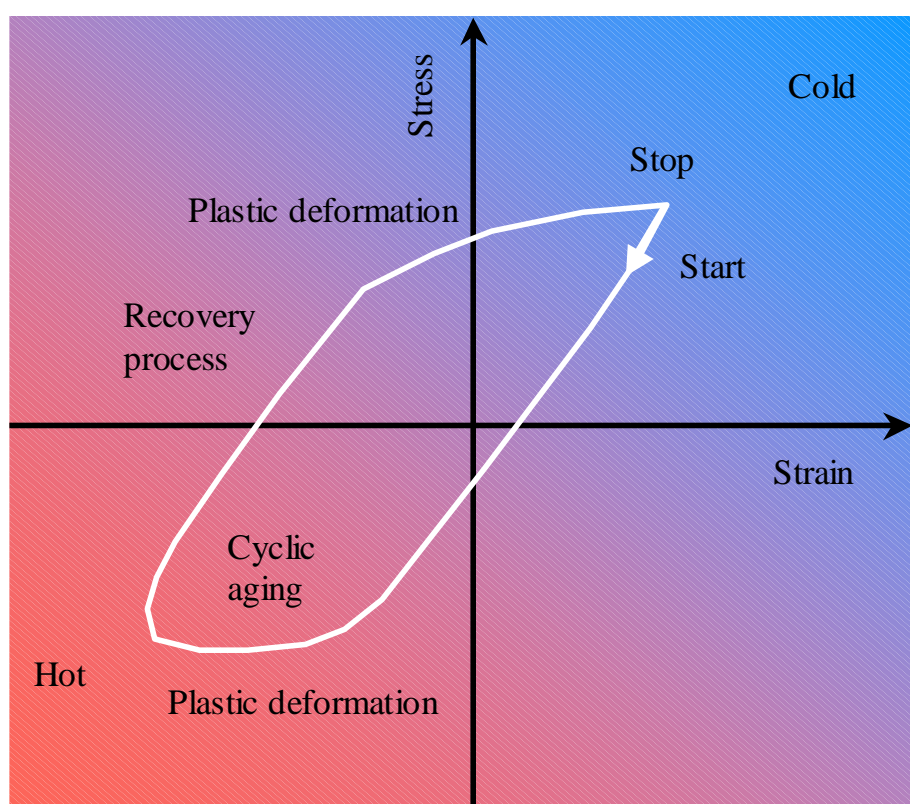


Fig.2.3 Schematic view of stress-strain history during engine operation

この亀裂に至る繰返し熱サイクル数  $N_f$  と運転中に発生するひずみ  $\Delta\varepsilon$  の間には次式に示す Manson-Coffin 則が成り立つことが知られている．

$$N_f^\alpha \Delta\varepsilon = A \quad (2.2)$$

ここで  $\alpha$  と  $A$  は，材料試験により同定される係数である．式(2.2)に示すように，低サイクル疲労寿命を評価する場合はひずみ振幅を評価する必要がある．そのため Finite Element Method (以下，FEM)では，材料非線形解析を行う必要がある．しかし本研究では，構造最適化手法の構築に主眼を置いており，厳密な寿命を扱うわけでないので，FEM で用いる材料は線形材料とし，ひずみではなく応力を，耐久性を評価する代替値として用いる．

図 2.4 に解析に用いた FEM モデルを示す．本解析では，計算効率向上のため，ヘッド，バルブシート，ヘッドボルトのみをモデル化するとともに，1 気筒分を切り出し，切り出し面には対象条件を設定した．なお，ヘッドボルトはビーム要素でモデル化し，ヘッド下面のガスケットと接触する場所には，ヘッドガスケットとシリンダブロック剛性に相当するバネ要素を配置した．節点数 4610，要素数 16055 (C3D4 要素)，である．FEM 解析は汎用有限要素法パッケージの ABAQUS(Dassault Systemes Simulia Corp.)を使用した．

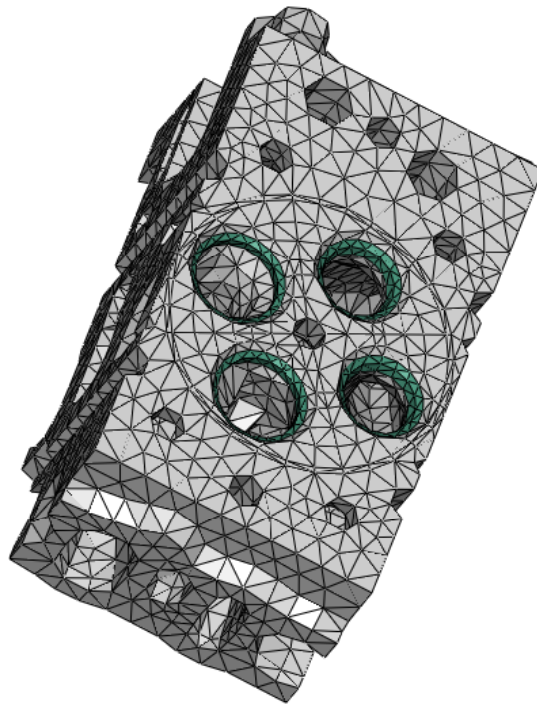


Fig.2.4 Finite element model of a cylinder head

表 2.1 に解析に用いた材料物性値を示す．材質は，一般的な片状黒鉛鋳鉄である．なお，物性値は常温での値である．

Table 2.1 Material properties of gray cast iron

Young's modulus	110 GPa
Poisson's ratio	0.26
Tensile strength	294 MPa
0.2% proof stress	230 MPa
Thermal conductivity	51 W/mK
Thermal expansion coeff.	$12.5 \times 10^{-6}$ 1/K

## 2.2 ヘッド燃焼面の肉厚分布最適化問題

本節では，ヘッドを対象とした熱応力問題に関する最適化問題を定式化するとともに，そのアルゴリズムを示す．

### 2.2.1 設計変数の設定

従来の形状最適化では，複雑な形状変更を表現するため，直接に表面節点移動による方法，境界を表す既知関数の組合せによる方法，要素パターンを変更する方法，逆変分原理による方法などを用いて，最適化計算サイクルの中で形状を修正する．しかし，これらの方法を使って実際の設計問題を計算する時に，変数のグルーピングや解析メッシュのリメッシングなどの問題が存在している．複雑な形状最適化問題が対応でき，幅広く使われる方法はまだ確立していない．そこで本研究では，上述のような形状アップデートに対する問題を克服する方法として，モーフィング技術を適用する．モーフィングとは，既存のメッシュモデルを利用して，節点や要素ベースで形状変更する手法であり，この機能を利用することにより，最適化時のフレキシブルな形状変更に対応できるだけでなく，メッシュ品質を維持したままでの形状変更が可能である．なおモーフィングには，DEP/MeshWorks Morpher (茨城日立情報サービス)を使用した．

図 2.5 に，最適化において設定した設計変数を示す．設計変数は，ヘッド燃焼面に対する

冷却水側の節点の上下方向座標成分とする．設定した変数の数は，110 である．最適化により節点が上下することで，ヘッドの肉厚分布が変化し，最適な肉厚分布が得られる．この設計変数として定義した節点に対し，モーフィングで駆動させる節点集合を定義し，各集合にコントロール節点を定義する．そして，このコントロール節点を設計変数として最適化を行う．なお，設計変数の数は 16 である．製品内部に存在する節点は，デフォーマブル節点とし，コントロール節点の移動に追従できるように設定した．

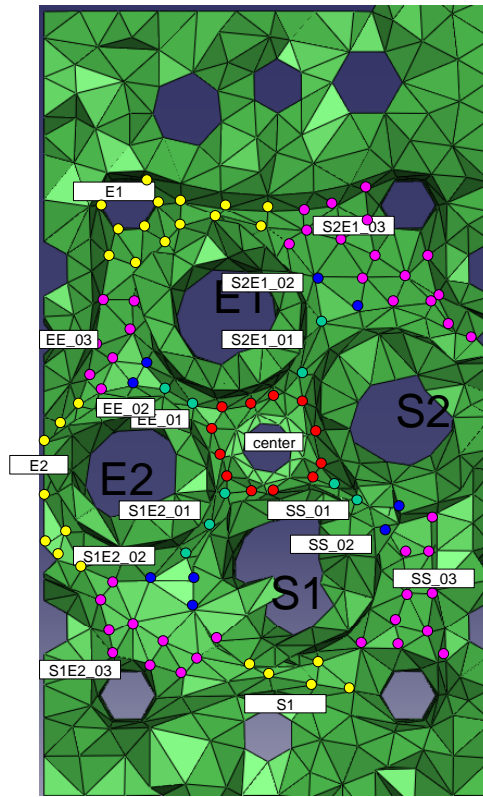


Fig.2.5 Setting of design variables

### 2.2.2 最適化問題の定式化

最適設計の目的は，初期形状で応力の高い部分の応力を抑え，分散化させることである．そこで目的関数  $F$  には，図 2.6 に示す最も応力が高い Point A と Point B の節点における最小主応力の平均値をとる．すなわち

$$F = \text{Average}(\sigma_{\text{Point A}}, \sigma_{\text{Point B}}) \quad (2.3)$$

ここで  $\sigma_{\text{Point A}}$  および  $\sigma_{\text{Point B}}$  は，Point A および Point B の節点に補間された最小主応力を示す．

制約条件は構造重量の上限値とコントロール節点の駆動範囲とし、最適化問題を以下のよう

$$\text{Find } \mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (2.4)$$

$$\text{Minimize } F$$

Subject to

Equilibrium equation and

$$x_{\min} < \text{Design variables} < x_{\max} \quad (2.5)$$

$$V < V_{\max} \quad (2.6)$$

ここで、 $\mathbf{x}$  は設計変数を並べたベクトルを示し、その成分は、モーフィングにおけるコントロール節点  $x_i$  である。また  $x_{\min}$  および  $x_{\max}$  は、設計変数の上下限値を、 $V$  は最適形状の体積、 $V_{\max}$  は体積制約の上限値を示す。

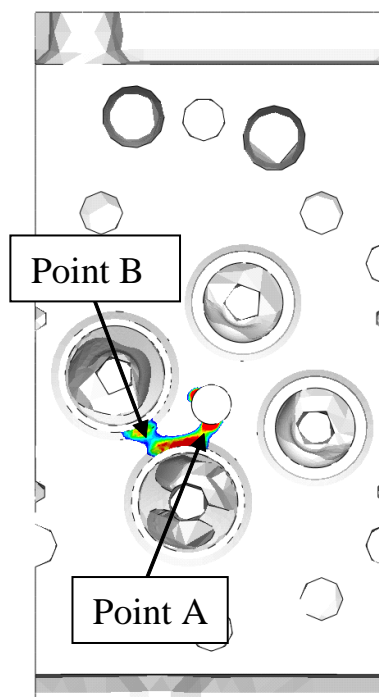


Fig.2.6 Evaluation points of optimization

### 2.2.3 最適化アルゴリズム

図 2.7 に最適化のフローチャートを示す．最初に，インプットデータより，モーフィング設定データを作成する．次に有限要素解析により，熱伝導方程式を解き，温度場  $T$  を求める．その値を用いて，弾性方程式を解き，熱応力場  $\sigma$  を求める．得られた  $\sigma$  より目的関数，体積制約の値を求める．目的関数が収束すればアルゴリズムを終了し，そうでなければ目的関数，体積制約の設計変数  $x_i$  に関する感度を求める．得られた感度をもとに，モーフィングと最適化手法を用いて設計変数  $x_i$  を更新する．その後，最初のステップから繰り返す．

なお本研究では，最適化手法として，許容方向法と一般化縮約勾配法の両方の長所を生かして，精度のよい解を効率的に求めることができる MMFD (Modified Method of Feasible Directions)を用いる．最適化エンジンは，iSIGHT (エンジニアスジャパン)を使用した．

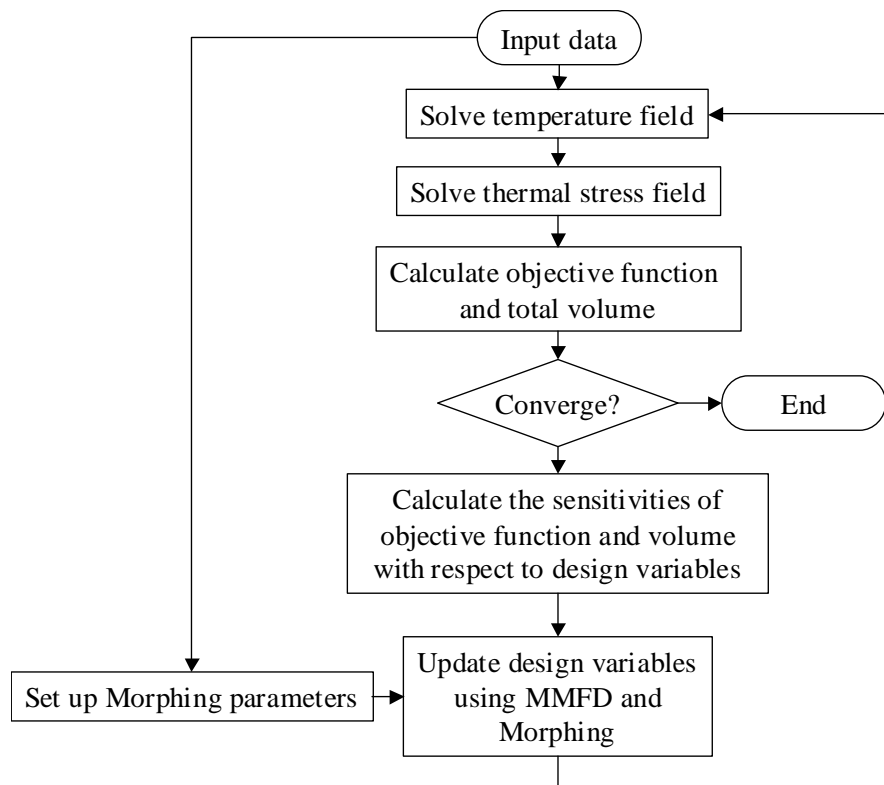


Fig.2.7 Flow chart of optimization method



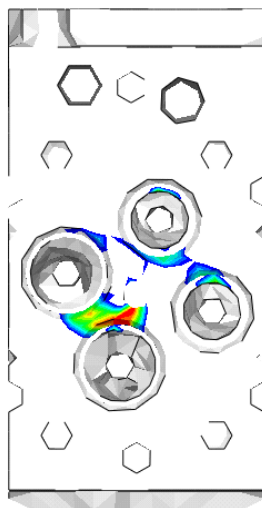
## 2.3 数値例による提案手法の検証

ここでは，本章で示した最適化手法の，ディーゼルエンジンシリンダヘッドへの適用例について述べるとともに，本手法の妥当性について検証する．

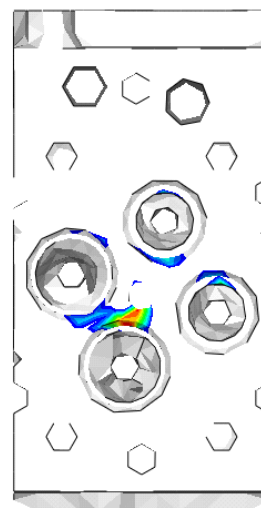
### 2.3.1 ヘッドの形状最適化

図 2.8 に最適化によって得られたヘッド燃焼面の最小主応力分布，図 2.9 には最適化の履歴，図 2.10 最適化によって得られた応力低減結果を示す．なお最適化は，設計変数の駆動範囲を  $-3$  から  $5$  とし，体積制約の上限値は，は元の体積の  $99.5\%$  に設定し実行した．計算回数は  $150$  回である．また最適化の過程におけるメッシュ更新において，メッシュ品質低下による解析エラーは生じなかった．

式(2.3)で設定した目的関数を最小化することにより，図 2.10 に示すように，Point A, B ともに初期値よりも応力を低減することができた．Point B において約  $19\%$  の改善効果が得られたが，Point A では，改善効果は約  $4\%$  であった．これは，初期形状においてノズル孔と弁孔の隙間が狭く，応力集中がこの寸法関係に強く依存してしまっているためと考えられる．Point A の応力改善には，弁やノズル孔を小径化するなどの基本的な寸法の見直しが必要と考えられる．



(a) Stress distribution in original structure



(b) Stress distribution in optimal structure

Fig.2.8 Comparison of minimum principle stress for original and optimal structures

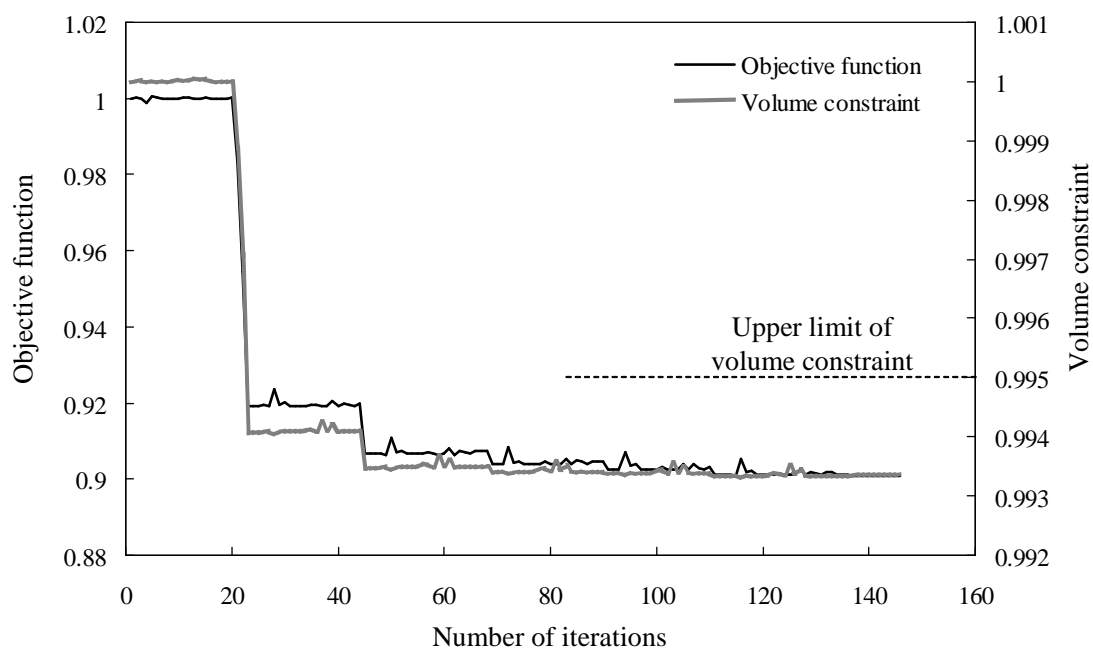


Fig.2.9 History of optimization

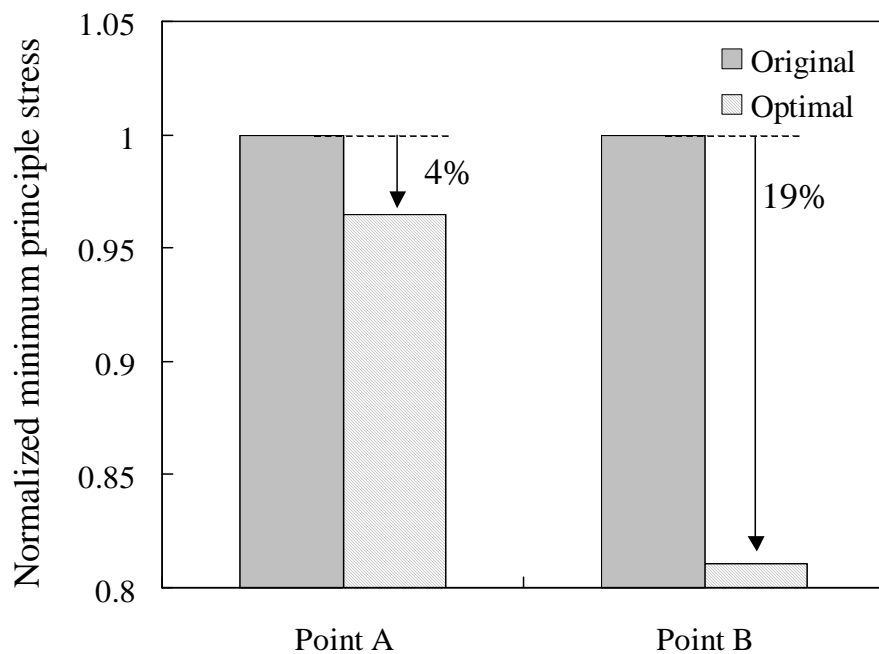


Fig.2.10 Effect of stress reduction upon optimal structure

図 2.11 に、最適化によって得られた燃焼面肉厚の増減分布を示す。なお、黒色は肉厚の増加、白色は減少を示している。図に示すように、Point B において肉厚が増加しており、その両側で減少している。これは、応力集中部の肉厚をアップさせ、断面積を増加することにより応力集中を緩和させるとともに、その両側を薄肉化することで、応力を面内方向に拡散させた結果であると考える。以上のように、本手法により物理的に妥当な最適形状を得ることができた。

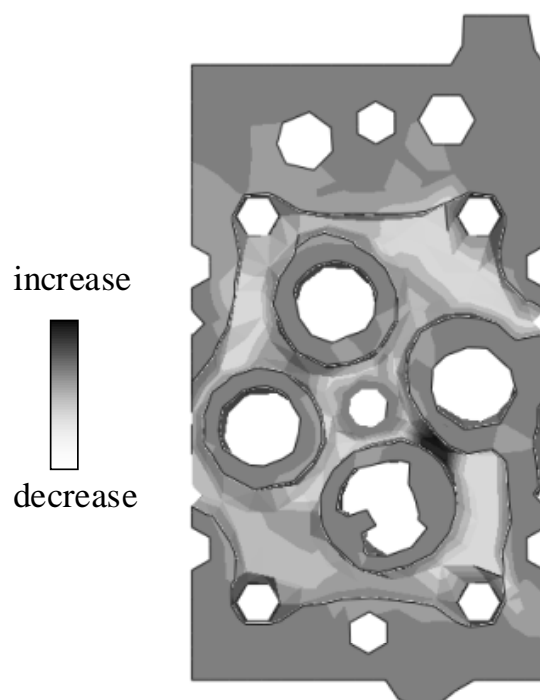


Fig.2.11 Wall thickness distribution of optimal structure

### 2.3.2 実験計画法による初期形状の設定

通常、形状最適化を行う場合、最適解は設計変数の初期値すなわち初期形状に依存する場合があります。大域的な最適解であることを保障することが難しい。このような問題を克服する方法として遺伝的アルゴリズムなどの探索的手法を用いることが考えられるが、局所探索が不得手、高い計算負荷などの問題点がある。そこで本研究では、初期形状が最適形状に与える影響を検討するため、実験計画法(以下 DOE と記す)を用いる。すなわち、DOE によりあらかじめ設計変数と目的関数の応答を求め、DOE により得られた最良点を初期形状として最適化を行う。なお DOE では 3 水準の L81 直行表を用いた。

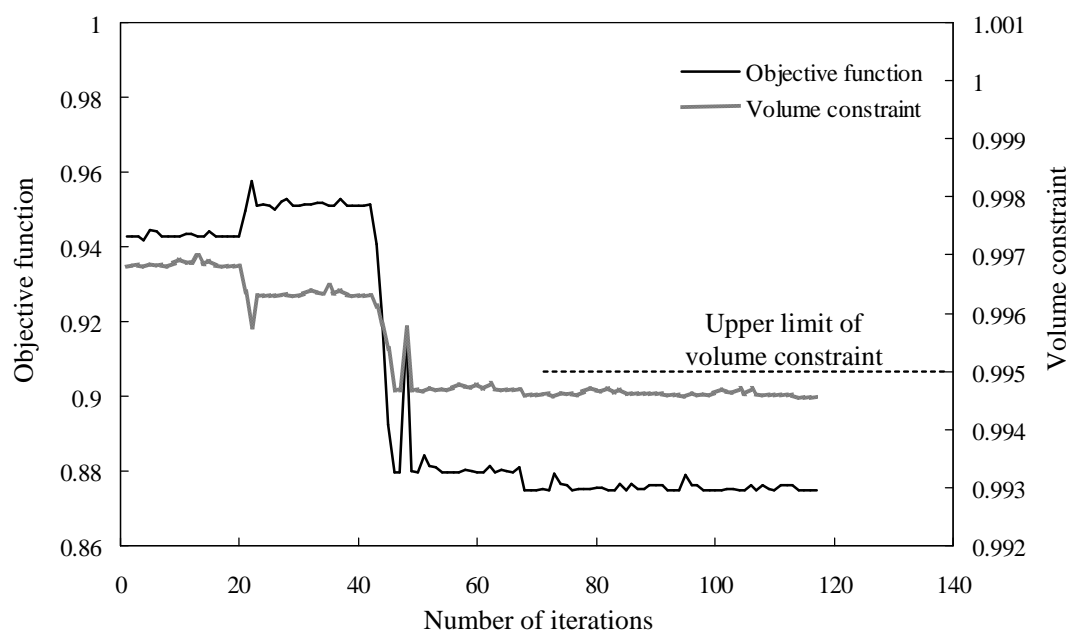


Fig.2.12 History of optimization

図 2.12 に、最適化の履歴を示す。なお目的関数および体積は DOE を用いない場合の初期形状における値を 1 として正規化している。計算回数は 78 回であった。図に示すように、DOE の最良点を初期値とした時点で、5%の目的関数の低減が得られており、さらに MMFD を実行することにより合計 12%の目的関数の低減が得られた。体積は、元の体積の 99.5%であった。

図 2.13 に、MMFD と初期形状設定に DOE を用いた場合の Point A, B の応力の比較を示す。図に示すように各ポイントそれぞれにおいて改善効果が得られた。DOE を用いない場合と比較して、約 3～4%の応力低減効果を得ることができ、初期形状決定に DOE を用いることの効果を確認できた。

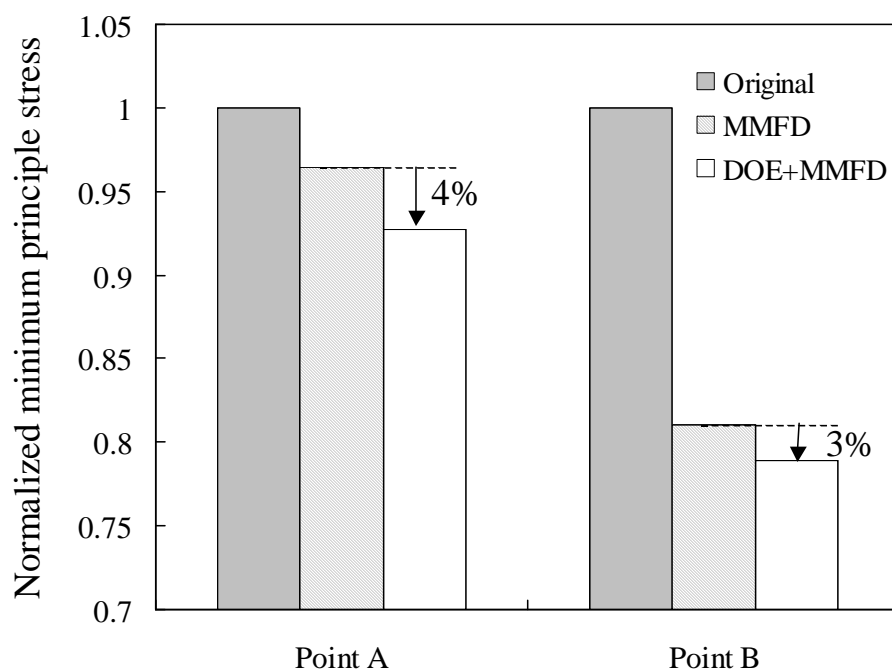


Fig.2.13 Comparison of stress reduction of optimal structure using MMFD and DOE+MMFD

## 2.4 まとめ

シリンダヘッドの熱応力の最小化問題に対して，パラメトリック形状最適化手法の適用について検討した結果，以下の結論が得られた．

- (1) エンジン鋳物部品のような熱を考慮すべき最適設計問題に対して適用可能な，パラメトリック形状最適化手法を構築した．
- (2) 形状最適化におけるメッシュアップデートへのモーフィング技術の適用は，メッシュ品質の維持および計算効率化の観点から有効であることを確認した．
- (3) 形状最適化における初期形状設定に実験計画法を用いることで，局所最適解を回避し得る可能性があり，より最適な解を得るうえで有効であることを確認した．

- (4) 本章では、最適化の過程における形状の更新に伴う温度変化を考慮し、ヘッド燃焼面の肉厚分布を最適化した。その結果、熱応力最小化問題に対しても、形状最適化手法が有効であることを確認した。ただし、本手法は、局所的な形状をより良い方法に修正する場合には効果が期待できるが、新たに部材が追加されることや穴があくような形態変化までは許容しておらず、得られる最適解は初期設計形状に依存すると言える。構造のトポロジー変更をも含んだ抜本的な構造変更を検討する場合には、他の最適化手法の援助が必要と考える。

そこで以下の章では、上述の問題を抜本的に解決することを目的とし、熱伝導体を対象とした、構造物の境界上の熱伝達を考慮可能な、熱拡散問題に対するトポロジー最適化を構築し、さらにこの手法を熱拡散と剛性の同時最適化を目的としたトポロジー最適化へ拡張する。



## 第 3 章

# 熱伝導問題に対するトポロジー最適化

第 2 章で示したように，形状最適化問題では，本来無限個の設計変数を取り扱う必要があるが，実際には数値解析上の手段を用いる段階で，有限個の従来構造境界上にある有限要素形状を制御パラメータとして，有限個の設計変数で最適化を行う手法である．すなわち，形状最適化は，構造物の外形形状そのものを設計変数として最適化を行う手法であり，構造の形態変化までは許容しない．これに対して，トポロジー最適化は，設計変数にきわめて大きな自由度を持ち，構造物に要求される性能を大幅に改善できる可能性を持つ．これは，トポロジー最適化が構造物の形状だけでなく，構造物内に設けられる穴の個数等や構造の位相変化を取り扱うことが可能なため，性能の抜本的改善が可能になるからである．そしてこれまで，トポロジー最適化は，剛性最大化問題 [12]，固有振動数最大化問題 [13] [14] など多くの問題に適用されている．

トポロジー最適化の熱拡散問題への適用については，場の方程式の単純性により，1980 年代に均質化法に基づいた基本理論の確立を目的に，多くの研究 [22] [23] [24] がなされている．しかし，これらの研究の重点は数学的な理論の構築に置かれ，工学的応用の検討はされていない．その後，均質化法に基づいた方法の他に，SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization)法に基づいた方法論 [28] [29] が提案されたが，いずれの方法論においても，設計空間の緩和においては有限要素内で材料密度を一定と仮定し，要素間での不連続な材料分布を許容している．このため，チェッカーボードなどの数値的な問題を生じる可能性をもっているうえ，熱分布にアンダーシュートやオーバーシュートが生じる問題点 [38] が指摘されている．特に，内部発熱を伴う問題では，内部発熱量も設計変数とともに変化するため，この数値不安定性の問題は顕著になるうえ，実際の発熱量との相違も生じると考えられる．さらに設計領域の境界上に設計変数を設定することができないので，境界上の熱伝達を表現することが難しい欠点ももつ．近年，Gersborg-Hansen ら [30] は，有限体積法に基づいたトポロジー最適化の方法を提案しているが，設計空間の緩和には SIMP 法を用いており，上に示した数値的な問題を生じる可能性をもつ．これに対して，Yoon と Kim [38] は，これらの問題を回避するため，要素間の結合性を節点間に配置したリンク要素で表し，こ



れを設計変数として最適構造を求める ECP (Element Connectivity Parameterization) 法を提案しているが、この方法は連続体力学との理論的整合性がないなどの問題点を持っている。他方、Matsui と Terada [31] や、Rahmatalla と Swan [32] は上述の数値的な問題を克服する方法として、構造問題を対象に、材料分布の連続性を仮定したトポロジー最適化を提案しているが、熱拡散問題への適用・検討はされていない。

そこで本章では、以上のような数値不安定性や境界条件の設定に関する問題を抜本的に解決するために、構造物の熱伝導問題に対して、材料分布の連続性を仮定した、均質化法に基づく新しいトポロジー最適化手法を構築する。さらに簡単な数値例により、本章で提案する方法論の妥当性を検証する。

### 3.1 トポロジー最適化

トポロジー最適化の基本的な考え方は、図 3.1 に示す固定設計領域と次式に示す特性関数  $\chi_\Omega$  の導入にある。すなわち、最適構造となる本来の設計領域  $\Omega_d$  を包含する固定設計領域  $D$  を最初に設け、その固定設計領域と特性関数  $\chi_\Omega$  を用いて、最適化問題を材料分布問題に置き換える。

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (3.1)$$

上式の  $\chi_\Omega$  を用いれば、固定設計領域  $D$  内の座標  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}^T$  にある点が、 $\Omega_d$  内にあるかどうかの判断をすることにより、最適構造を決定することが出来る。しかし、固定設計領域において、 $\chi_\Omega$  はいたるところ不連続な特性を持つことになる。この問題を解決し、大域な観点から連続な値を得る設計空間の緩和方法として、均質化法 [11] や SIMP 法 [20] が用いられている。均質化法は、固定設計領域内の無限小の領域で生じる 0, 1 の状態を、無限小のマイクロストラクチャを仮定し、その均質化された材料定数を算出することにより、大局的な見地から解釈できる状態を得、不連続性の問題を解決している。また、最適化の定式化の段階では、有限要素法による離散化を前提としていない。すなわち、定式化を続体力学に基づいて行っており、数学的な一貫性が確保される。

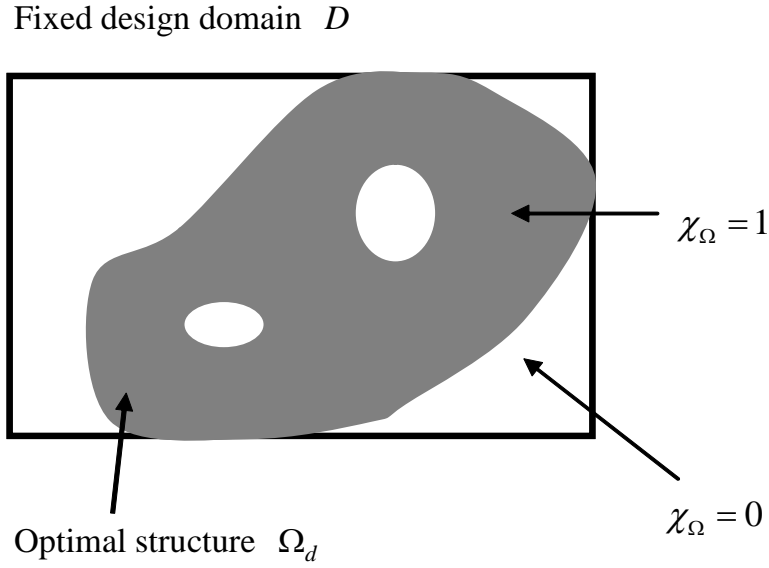


Fig.3.1 Characteristic function related to material distribution

これに対して SIMP 法では、固定設計領域  $D$  内において特性関数  $\chi_\Omega$  を用いて任意のトポロジーを持つ構造を表現する点では同じであるが、材料の特性に等方性を仮定して、弾性テンソル  $E$  を正規化された密度  $\rho$  の関数  $f$  として簡易的に次式とおく。

$$E = f(\rho)E_0 \quad (3.2)$$

ここで  $E_0$  は、等方性材料の弾性テンソルである。関数  $f$  の最も一般的なものは、

$$f(\rho) = \rho^p \quad (3.3)$$

である。ここで、 $p$  はペナルティを与えるパラメータである。通常  $p$  の値は 2~3 が利用されている。このように SIMP 法は、簡易的な関係式をもちいているため、パラメータの設定によっては関係式が物理的に存在しない可能性がある。Bendsøe と Sigmund [29] は、2 つの材料が混在するときの弾性係数の境界を示す、Hashin-Shtrikman [46] の境界条件より、 $p$  のとるべき範囲について述べている。しかしこの値を用いて  $p$  の範囲は決められても、実在する材料との対応を厳密に評価することは難しい。

そこで本章では、連続体力学に基づき定式化されており、数学的な一貫性が確保されている均質化法に基づき、熱伝導問題に対するトポロジー最適化を定式化する。

### 3.2 均質化法に基づくトポロジー最適化

ここでは、均質化法の基本的な考え方を述べた後、熱拡散問題における、設計空間の緩和に必要な、均質化熱拡散テンソルを導出する。さらに、導出された均質化熱拡散テンソルを用いた、熱拡散最大化問題を定式化するとともに、そのアルゴリズムを構築する。

#### 3.2.1 固定設計領域の導入

まず、特性関数  $\chi_\Omega$  を用いて、本来の設計空間  $\Omega_d$  で記述される仮想仕事の原理の式を、拡張された固定設計領域  $D$  において成り立つように書き換える。今、図 3.2 に示すように本来の設計空間  $\Omega_d$  が、熱拡散テンソル  $\kappa$  の熱伝導体であるとする。この熱伝導体には、内部発熱  $b$  が作用しているものとする。そして熱伝導体の境界  $\Gamma_c$  は温度が  $c$  に固定され、境界  $\Gamma_q$  には熱流束  $q$  が作用しているとする。このとき、平衡状態における  $\Omega_d$  の温度場  $u$  に関する仮想仕事の原理は次式となる。

$$\int_{\Omega_d} (\nabla \tilde{T})^T \kappa (\nabla T) d\Omega = \int_{\Omega_d} b T d\Omega + \int_{\Gamma_q} q T d\Gamma \quad \text{for } T \in V^d \quad \forall \tilde{T} \in V^d \quad (3.4)$$

ここで、 $V^d$  は次式に示す関数空間である。

$$V^d = \{\tilde{T} \in H^1(\Omega_d) \text{ with } \tilde{T}^\varepsilon = c \text{ almost everywhere on } \Gamma_c\} \quad (3.5)$$

$\nabla T$  は線形温度勾配で、次式で表される。

$$\nabla T^T = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} \right\} \quad (3.6)$$

ここで、 $H^1$  は、ソボレフ空間を示す。

次に、式(3.1)の特性関数を用いて、式(3.4)を拡張された固定設計領域内  $D$  内で成り立つように書き換えると、以下のようになる。このように、構造最適化は、固定設計領域  $D$  で、与えられた目標が達成できるような熱拡散テンソル  $\chi_\Omega \kappa$  の分布を求める問題と捉えることができる。

$$\int_D (\nabla \tilde{T})^T \chi_\Omega \kappa (\nabla T) d\Omega = \int_D \chi_\Omega b \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma \quad \text{for } T \in V^d \quad \forall \tilde{T} \in V^d \quad (3.7)$$

しかしながら、特性関数  $\chi_\Omega$  は、いたるところで不連続な特性を示す。そこで、均質化法を用いて、固定設計領域内の無限小の領域で生じる 0, 1 の状態を、無限小のマイクロストラクチャを仮定し、その均質化された材料定数を算出し、設計空間の緩和を行う。

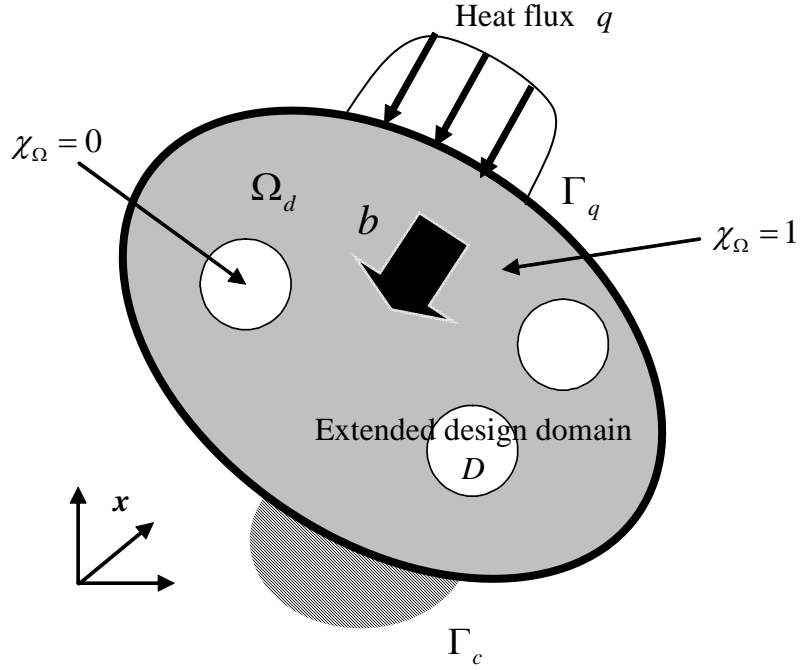


Fig.3.2 Thermal boundary condition for a thermal conductor

### 3.2.2 均質化法による設計空間の緩和

均質化法 [47] [48] (Homogenization method) の特徴は、図 3.3 に示す大域的な座標  $x$  と局所的な座標  $y$  を導入して、この関連性を漸近展開により得られるマルチスケールの変数により結びつけることにより、マイクロストラクチャレベルの局所的な弾性テンソルや熱拡散テンソルなどの物理特性と大域的な物理特性を結びつけることにある。

そこでまず 均質化された熱拡散テンソル  $\kappa^H$  を求める方法を示す 図 3.3 に示すように、固定設計領域  $D$  が空間的に周期性をもつ無限小のマイクロストラクチャで構成されているものとする。このとき、マイクロストラクチャは無限小の大きさであるので、大きさを正規化してユニットセルで表すものとする。このユニットセルの空間的な周期性のもと、大域的な座標  $x$  局所的な座標  $y$  を次式の関係で結びつける。

$$y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.8)$$

ここで、 $\varepsilon$  は非常に小さな実数である。マイクロストラクチャの大きさは、局所的な位置を表す座標  $y$  上で、

$$Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3] \quad (3.9)$$

であるとする．

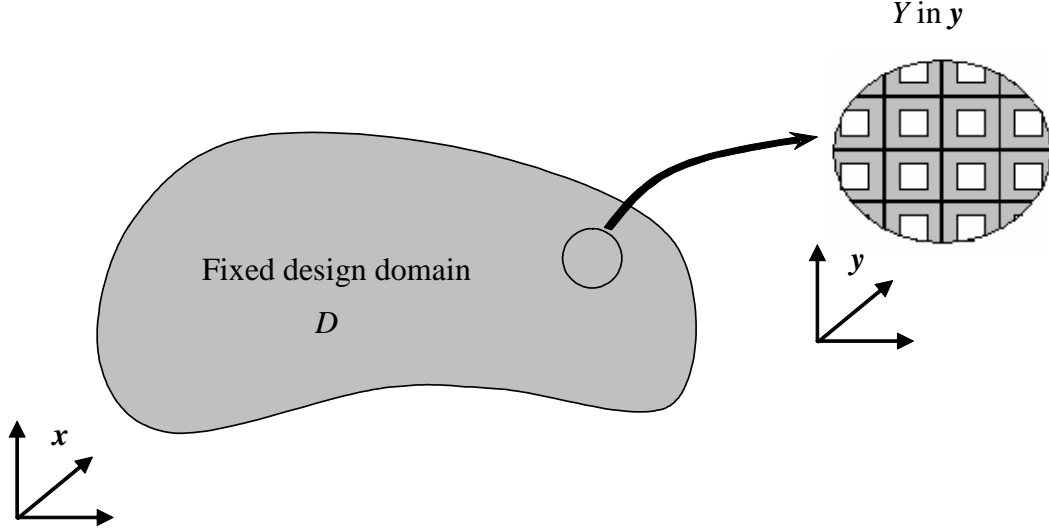


Fig.3.3 Two-scale modeling for the periodic porous body

つぎに，全ポテンシャルエネルギーを記述する任意の許容温度  $\tilde{T}^\varepsilon$  を次式に示すように，1 次の漸近展開する．

$$\tilde{T}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \tilde{T}^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{T}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{T}^{(0)} + \varepsilon \tilde{T}^{(1)} \in V^\varepsilon \quad (3.10)$$

ここで  $V^\varepsilon$  は次式に示す関数空間である．なお，変数の上付きは漸近展開の次数を表す．

$$V^\varepsilon = \{ \tilde{T} \in H^1(D \times Y) \text{ with } \tilde{T}^\varepsilon = c \text{ almost everywhere on } \Gamma_c \} \quad (3.11)$$

$g^\varepsilon(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を2つの座標  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の任意の関数とすれば，一般に次の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial g^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial g\left(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial y_i} \quad (3.12)$$

この関係式を用いて，線形温度勾配の漸近展開を求めると，次式となる．

$$\nabla \tilde{T}^\varepsilon = \nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)} + \varepsilon \nabla_x \tilde{T}^{(1)} \quad (3.13)$$

ここで，演算子  $\nabla_x \tilde{T}$  は，次式で示すオペレーションを行うものとする．

$$(\nabla_z \tilde{T})^T = \left\{ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z_1}, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z_2}, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z_3} \right\} \quad (3.14)$$

ここで式(3.7)の仮想仕事の原理の式の表記を簡略して次式で示す．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_d} (\nabla \tilde{T}^\varepsilon)^T \kappa^\varepsilon (\nabla T^\varepsilon) d\Omega = \\ \int_{\Omega_d} b^\varepsilon \tilde{T}^\varepsilon d\Gamma + \int_{\Gamma_q} q \tilde{T}^\varepsilon d\Gamma \quad \text{for } T \in V^d \quad \forall \tilde{T} \in V^d \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで  $\kappa^\varepsilon$ ,  $b^\varepsilon$  はそれぞれ  $\chi_\Omega \kappa$ ,  $\chi_\Omega b$  を意味し, 上付きの  $\varepsilon$  は, 個々の物理量が 2 つの座標  $x, y$  の関数であることを示す．このとき全ポテンシャルエネルギー  $F$  は次式で表される．

$$F(\tilde{T}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_D (\nabla \tilde{T}^\varepsilon)^T \kappa^\varepsilon (\nabla T^\varepsilon) d\Omega - \int_D b \tilde{T}^\varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma_q} q \tilde{T}^\varepsilon d\Gamma \quad (3.16)$$

式(3.10)と式(3.13)を式(3.16)に代入すれば,

$$\begin{aligned} F(\tilde{T}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_D \left( \nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)} + \varepsilon \nabla_x \tilde{T}^{(1)} \right)^T \kappa^\varepsilon \left( \nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)} + \varepsilon \nabla_x \tilde{T}^{(1)} \right) d\Omega \\ - \int_D b \left( \tilde{T}^{(0)} + \varepsilon \tilde{T}^{(1)} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_q} q \left( \tilde{T}^{(0)} + \varepsilon \tilde{T}^{(1)} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる．

ここで,  $\varepsilon$  は非常に小さい値と仮定しているので, 式(3.17)に対し  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極値をとると,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\tilde{T}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_D \left( \nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)} \right)^T \kappa^\varepsilon \left( \nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)} \right) d\Omega \\ - \int_D b \tilde{T}^{(0)} d\Omega - \int_{\Gamma_q} q \tilde{T}^{(0)} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで, 熱流束  $q$  は  $\varepsilon$  には無関係であると仮定している． $\tilde{T}^{(1)}$  は  $Y$ -周期的であるから,

$$\tilde{T}^{(1)}(x, y) = \tilde{T}^{(1)}(x, y + Y) \quad (3.19)$$

の関係が成り立つ．さらに  $\kappa^\varepsilon$ ,  $b^\varepsilon$  も  $Y$ -周期的であると仮定すれば,

$$\kappa^\varepsilon(x) = \kappa(x, y) = \kappa(x, y + Y) \quad (3.20)$$

$$b^\varepsilon(x) = b(x, y) = b(x, y + Y) \quad (3.21)$$

と書ける．

ところで，任意の関数  $\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(D \times L)$  が  $Y$ -周期的，すなわち  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y} + Y)$  であれば，次式が成り立つ．

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_D \phi^\varepsilon(\mathbf{x}) d\Omega = \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dY d\Omega \quad (3.22)$$

この関係式を用いて，式(3.18)を書き換えると，

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F(\tilde{T}^\varepsilon) &= F(\tilde{T}^{(0)}, \tilde{T}^{(1)}) \\ &= \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( (\nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)})^T \kappa^\varepsilon (\nabla_x \tilde{T}^{(0)} + \nabla_y \tilde{T}^{(1)}) \right) dY d\Omega \\ &\quad - \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{T}^{(0)} dY d\Omega - \int_{\Gamma_q} \frac{1}{|Y|} \int_Y q \tilde{T}^{(0)} dY d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる．

次に， $\tilde{T}^0$  に関してガトー微分をとって，大域的な意味での平衡方程式を導くと以下のようにになる．

$$\begin{aligned} DF(T^{(0)}, T^{(1)})(\tilde{T}^{(1)}) &= \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y (\nabla_x \tilde{T}^{(0)})^T \kappa^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nabla_x T^{(0)} + \nabla_y T^{(1)}) dY d\Omega \\ &\quad - \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{T}^{(0)} dY d\Omega - \int_{\Gamma_q} \frac{1}{|Y|} \int_Y q \tilde{T}^{(0)} dY d\Gamma \end{aligned} \quad (3.24)$$

すなわち，

$$\begin{aligned} &\int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y (\nabla_x \tilde{T}^{(0)})^T \kappa^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nabla_x T^{(0)} + \nabla_y T^{(1)}) dY d\Omega = \\ &\int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{T}^{(0)} dY d\Omega + \int_{\Gamma_q} \frac{1}{|Y|} \int_Y q \tilde{T}^{(0)} dY d\Gamma \\ &\text{for } T^{(0)} \in V^{(0)} \quad T^{(1)} \in V^{(1)} \quad \tilde{T}^{(0)} \in V^{(0)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる．ここで，

$$V^{(0)} = \{ \tilde{T} \in H^1(D) \text{ with } \tilde{T} = c \text{ almost everywhere on } \Gamma_c \} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \{ \tilde{T} \in H^1(D \times Y) \text{ with } \tilde{T}^\varepsilon = c \text{ almost everywhere on } \Gamma_c \\ &\text{and } \tilde{T} \text{ is } Y\text{-periodic} \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

同様に， $\tilde{T}^{(0)}$  に関してガトー微分をとって，局所的な意味での平衡方程式を導く．

$$DF(T^{(0)}, T^{(1)})(\tilde{T}^{(1)}) = \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y (\nabla_x \tilde{T}^{(1)})^T \kappa^\varepsilon(x, y) (\nabla_x T^{(0)} + \nabla_y T^{(1)}) dY d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y (\nabla_x \tilde{T}^{(1)})^T \kappa^\varepsilon(x, y) (\nabla_x T^{(0)} + \nabla_y T^{(1)}) dY d\Omega &= 0 \\ \text{for } T^{(0)} \in V^{(0)} \quad T^{(1)} \in V^{(1)} \quad \tilde{T}^{(0)} \in V^{(0)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

したがって, 式(3.25)と式(3.29)を満たす温度場  $T^{(0)}$  と  $T^{(1)}$  を求めれば良い. この問題を解くために,  $T^{(1)}$  を次式で表されると仮定する.

$$T^{(1)}(x, y) = -\chi(x, y) \nabla_x T^{(0)} + \Psi(x, y) + c(x) \quad (3.30)$$

ここで,  $\chi(x, y)$  は, 次式により得られる特性温度である.

$$\int_Y (\nabla_y \tilde{T}^{(1)})^T \kappa(x, y) \nabla_y \chi(x, y) d\Omega = \int_Y (\nabla_y \tilde{T}^{(1)})^T \kappa(x, y) dY \quad \text{for } \forall \tilde{T}^{(1)} \in V^Y \quad (3.31)$$

同様に,  $\Psi(x, y)$  は, 次式により得られる特性温度である.

$$\int_Y (\nabla_y \tilde{T}^{(1)})^T \kappa(x, y) \nabla_y \Psi(x, y) d\Omega = 0 \quad \text{for } \forall \tilde{T}^{(1)} \in V^Y \quad (3.32)$$

$$V^{(1)} = \{\tilde{T} \in H^1(Y) \text{ and } \tilde{T} \text{ is } Y\text{-periodic}\} \quad (3.33)$$

式(3.30)を式(3.29)に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y (\nabla_x \tilde{T}^{(0)})^T \kappa^H(x, y) \{I - \nabla_y \chi(x, y)\} dY d\Omega \\ + \int_D \frac{1}{|Y|} \int_Y (\nabla_y \tilde{T}^{(1)})^T \kappa^H(x, y) \nabla_y \Psi(x, y) dY d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

となり, 式(3.29)は自動的に満たされる.

式(3.30)を式(3.25)に代入し整理すると, 次式の均質化された平衡方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_D (\nabla_x \tilde{T}^{(0)})^T \kappa^H(x) \nabla_x T^{(0)} d\Omega = \\ + \int_D b^H(x)^T T^{(0)} d\Omega + \int_D q T^{(0)} d\Gamma \quad \text{for } T^{(0)} \in V^D \quad \forall \tilde{T}^{(0)} \in V^D \end{aligned} \quad (3.35)$$

ここで,  $\kappa^H(x)$  は均質化された熱拡散テンソル,  $b^H$  は均質化された内部発熱で, それぞれ次式で表される.



$$\kappa^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \kappa(x, y) (I - \nabla_y \chi) dY \quad (3.36)$$

$$b^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_D b(x, y) dY \quad (3.37)$$

以上の手続きにより，マイクロストラクチャ上の物理特性から大域的な物理特性である均質化熱拡散テンソル  $\kappa^H$  の関係を導く．

次に，トポロジー最適化における設計空間の緩和に用いる均質化熱拡散テンソルを，式 (3.36) により求める．

図 3.4 に，2 次元の熱拡散問題における設計空間の緩和に用いるマイクロストラクチャを示す．図に示したように，正方形形状の穴の 1 辺  $r$  を設計変数とし，完全孔の場合 1 で，完全稠密の場合 0 とし，

$$0 \leq r(x) \leq 1 \quad (3.38)$$

の制約を受ける．このとき，ユニットセルの密度は，

$$\rho = 1 - r^2 \quad (3.39)$$

と書くことができる．なお，熱伝導テンソルは 2 階のテンソルであるから，正方形形状のユニットセルを用いれば，等方性をもつ応答となることを注記しておく．

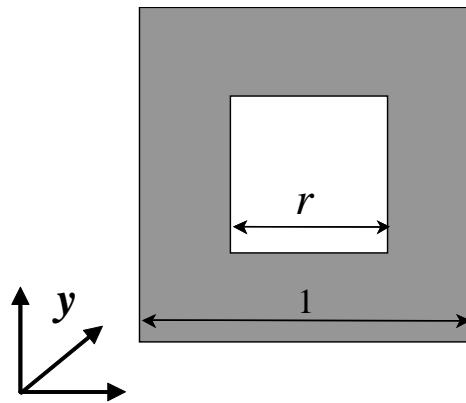


Fig.3.4 Microstructure used for the relaxation of design domain

図 3.4 におけるユニットセルの  $r$  を変更しユニットセルの密度を変化させた場合のそのそれぞれについて、均質加熱拡散テンソルを求める。これにより、図 3.5 に示すようなそれぞれのユニットセルの状態に対応した熱拡散テンソルを得ることができる。すなわち、ユニットセルにおける  $r$  を最適化の設計変数とすれば、 $r=1$  で非構造、 $r=0$  で構造部分を表現でき、その密度における熱拡散テンソルを求めることができる。

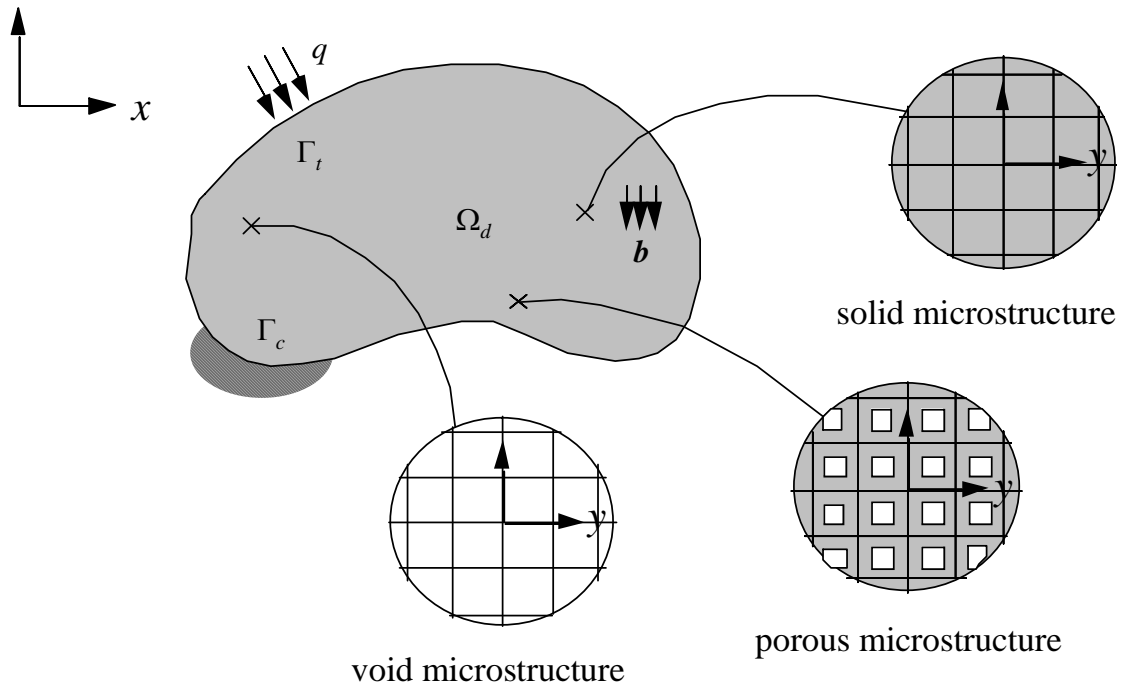


Fig.3.5 Topology optimization based on the homogenization method

図 3.6 に、図 3.4 のマイクロストラクチャの密度を変更し、式(3.36)により求めた均質化熱伝導テンソルを示す。このように、均質化熱拡散テンソルを設計変数の関数として記述し、設計空間の緩和を行う。

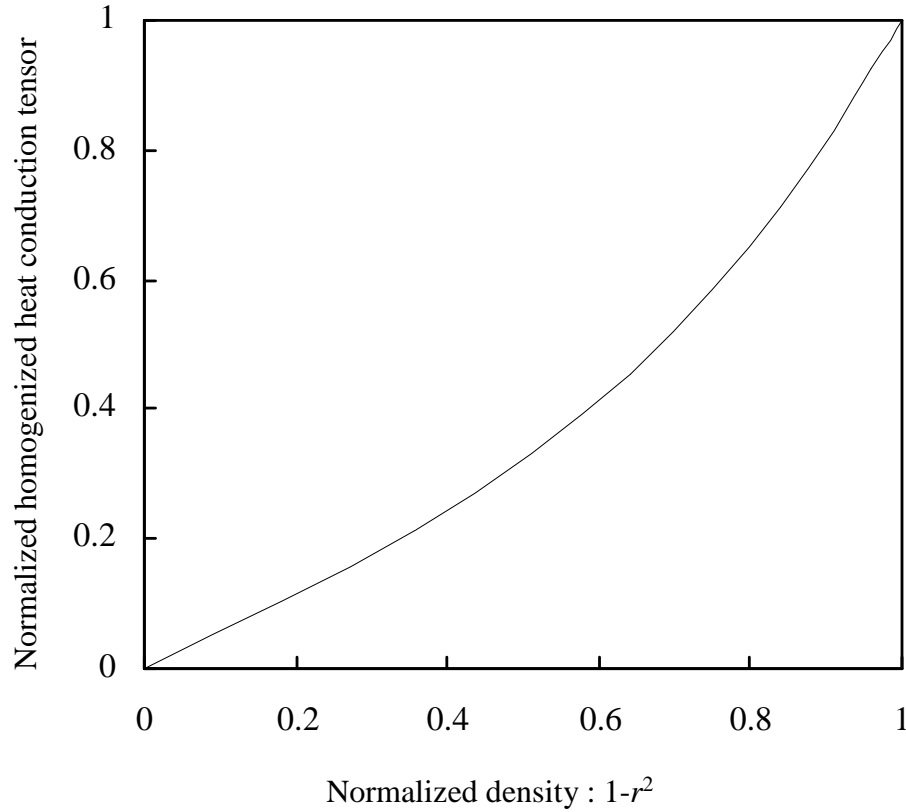


Fig.3.6 Relationship between normalized homogenized head conduction tensor and normalized density

### 3.2.3 連続的材料分布を仮定した設計空間の緩和方法

従来までの設計空間の緩和法 [3] [20] [28] [29] では、緩和された固定設計領域の離散化近似において、各有限要素内に設計変数を配置し、さらに要素内では同じ設計変数の値をとると仮定し、各要素に独立に設計変数を配置している。しかし、この場合、設計変数の連続的な分布を表現するためには、十分に細かな要素分割が必要となる。この有限要素により、有限要素法で平衡方程式を解こうとすると、現実的な時間内に計算を完了することができないことが予測される。さらに、要素間での設計変数の不連続性は、チェッカーボードなどの数値的な問題の起因となっている。これを回避するためにフィルタリング手法 [49] [50] やペリメータコントロール法 [51] などの方法が提案されてきた。しかしフィルタリング法ではフィルタリングを行う領域の大きさや、ペリメータコントロール法では最適

となる対象物の周長など，これらの手法に必要となるパラメータを事前に適切に設定することは難しい．

このような問題を根本的に解決するために，Matsui と Terada [31] は，材料分布の連続性を仮定した設計空間の緩和方法(Continuous Approximation of Material Distribution, CAMD)を近年提案している．この方法では離散化近似において，各節点に設計変数を配置し，設計変数が固定設計領域  $D$  における  $C^0$  以上の連続な関数であると仮定し，固定設計領域に分布する設計変数を，形状関数  $N_i^r(x)$ ，( $i = 1, \dots, n$ )を構成要素とする形状関数ベクトルを用いて，次のように離散化する．

$$r(x) \approx r^h(x) = N^r(x)R = \sum_{i=1}^n N_i^r(x)R_i \quad (3.40)$$

ここで  $r^h$  は，離散化近似された設計変数を表す．また， $R$  は節点における設計変数を並べたベクトルであり， $n$  は設計変数の数（領域内の総節点数）を表す．なお，本研究では，形状関数  $N_i^r(x)$  に双一次関数を用いる．本手法を用いれば，少なくとも  $C^0$  連続の材料分布が保証されるため，チェッカーボードは発生しないことが期待される．したがって，本章でも，以上の手続きにより，熱拡散の最適化問題のトポロジー最適化について設計空間の緩和を行う．

### 3.2.4 熱伝導問題の定式化

本節では，線形熱伝導体を対象とした一般的な熱拡散問題に関する最適化問題を定式化するとともに，そのアルゴリズムを示す．

境界  $\Gamma$  をもつ 2 次元設計領域が  $\Omega_d$  で，熱拡散テンソルを  $\kappa^H(x)$  とする熱伝導体を考える．このとき，支配方程式は以下のように記述される．

$$\nabla \cdot (\kappa^H \nabla T) + b = 0 \quad (3.41)$$

ここで，仮想温度  $\tilde{T}$  を式(3.41)に適用し，部分積分を行うと以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa^H \nabla T d\Omega - \int_{\Gamma} \tilde{T} \kappa^H \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

ここで，図 3.7 に示すように，境界  $\Gamma_T$  において温度が  $T = 0$  に固定され，境界  $\Gamma_c$  には温度境界条件  $T = c \neq 0$ ，境界  $\Gamma_q$  には熱流束境界条件，境界  $\Gamma_h$  には熱伝達境界条件が与えられているとする．さらに領域  $\Omega_d$  内部には内部発熱が与えられているとする．このとき釣り合

い式は弱形式で記述すれば次式となる[8] .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{T} h T d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla c d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \quad \forall \tilde{T} \in V \end{aligned} \quad (3.43)$$

ここで  $q$  は熱流束,  $h$  は熱伝達係数,  $T_{amb}$  は周囲温度,  $b$  は単位体積当りの内部発熱量である. なお, 熱伝達境界および温度境界条件が与えられた場合は,  $\Gamma_T$  の温度境界条件は設定する必要がない. また, 仮想温度  $\tilde{T}$  を定義する空間  $V$  は次のようである.

$$V = \{ \tilde{T} \mid \tilde{T} \in H^1(\Omega) \text{ and } \tilde{T} = 0 \text{ on } \Gamma_T, \tilde{T} = c \text{ on } \Gamma_c \} \quad (3.44)$$

ここで, 式(3.43)の両辺をそれぞれ

$$a(\tilde{T}, T) = \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{T} h T d\Gamma \quad (3.45)$$

$$L_c(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_g} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla c d\Gamma = \int_{\Gamma_c} q_{react}(\tilde{T}) c d\Gamma \quad (3.46)$$

$$L(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \quad (3.47)$$

と定義すると式(3.43)は,

$$a(\tilde{T}, T) + L_c(\tilde{T}) = L(\tilde{T}) \quad (3.48)$$

と書ける. ここで  $q_{react}$  は境界  $\Gamma_c$  に作用する反熱流束を示す.

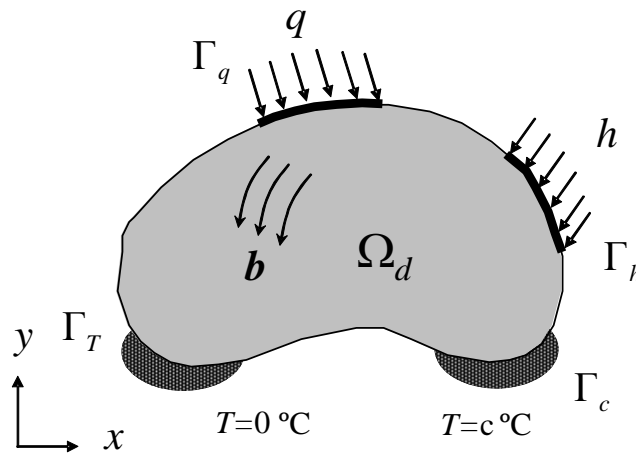


Fig.3.7 An arbitrary thermal conductor

### 3.2.5 全ポテンシャルエネルギーによる最適化手法の定式化

ここでは、種々の条件を含む熱拡散最適化問題を統一的に取り扱う方法について検討する．すなわち、(a)熱流束境界、(b)内部発熱、(c)温度境界、(d)熱伝達境界の4つの条件に関する最適化問題を統一的に取り扱う目的関数を構築し、それに基づき最適化問題を定式化する．まず、(a)熱流束境界では、境界 $\Gamma_T$ を温度 $T=0$ に固定し、境界 $\Gamma_q$ に熱流束を与えた場合を考える．ここで、目的関数として、構造問題における平均コンプライアンスに相当する次式で表される平均温度を定義する．

$$T_{mean} = \int_{\Gamma_q} qT d\Gamma + \int_{\Omega_d} bTd\Omega + \int_{\Gamma_h} h(T_{amb} - T)Td\Gamma + \int_{\Gamma_c} q_{react}(T)c d\Gamma \quad (3.49)$$

(a)の場合、平均温度を最小化することで、物体 $\Omega_d$ の熱拡散は最大化される．すなわち、熱流束に対して平均温度を最小化することにより、最も低い温度場を得、結果として熱伝導体の熱拡散を最大化できる．(b)の内部発熱を与えた場合は、熱流束を与えた場合と同様に、平均温度の最小化問題となる．これに対して、(c)温度境界として、境界 $\Gamma_T$ を温度 $T=0$ に固定し、境界 $\Gamma_c$ に温度 $T=c \neq 0$ を指定した場合を考える．このときは、温度 $c$ に抗するように反熱流束が境界 $\Gamma_c$ に作用するため、式(3.50)に示すように、平均温度の最大化により、熱拡散は最大化される．

$$T_{mean} = \int_{\Gamma_c} q_{react}(T)c d\Gamma = a(T, T) \quad (3.50)$$

次に、(d)の熱伝達境界として、境界 $\Gamma_T$ を温度 $T=0$ に固定し、境界 $\Gamma_h$ に熱伝達係数 $h$ 、周囲温度 $T=T_{amb} \neq 0$ を与えた場合を考える．この場合、境界 $\Gamma_h$ に作用する熱流束は、 $q = h(T_{amb} - T)$ となるので、物理的には平均温度は次式のように定式化される．

$$T_{mean} = \int_{\Gamma_h} h(T_{amb} - T)Td\Gamma \quad (3.51)$$

熱伝達境界条件は熱流束と同様に Neumann 型境界条件であり、熱伝達係数が十分小さい場合には、平均温度の最小化により熱拡散を最大化できる．しかし、熱伝達係数を十分大きな値に設定すると、境界 $\Gamma_h$ を周囲温度 $T=T_{amb}$ に固定した場合と等価となる．そのため、(c)の温度固定の場合と同様に、平均温度の最大化により熱拡散は最大化される．このように、熱伝達境界条件を指定した場合は、熱伝達係数の値によって、平均温度の最大化もしくは最小化により熱拡散が最大化され、どちらかを決定することは難しい．以上をまとめると、目的関数として平均温度を用いた場合の熱拡散最大化には、

- (a) 熱流束境界 : 最小化
- (b) 内部発熱 : 最小化
- (c) 温度境界 : 最大化
- (d) 熱伝達境界 : 不定

となり，目的関数を統一的に扱えない．この問題を解決するため，本研究では，次式の全ポテンシャルエネルギーを目的関数として最適化問題を定義する．

$$F(T) = \frac{1}{2}a(T, T) - L(T) = -\frac{1}{2}L(T) \quad (3.52)$$

上式を用いれば，(a)，(b)の場合については，平均温度の最小化問題なので，全ポテンシャルエネルギーを最大化すればよい．これに対して，(c)の場合は，

$$F(T) = \frac{1}{2}a(T, T) \quad (3.53)$$

となるが，式(3.50)に示すように平均温度の最大化問題なので，全ポテンシャルエネルギーを最大化すれば良いことになる．(d)の場合についても，全ポテンシャルエネルギーは，

$$F(T) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} h T_{amb} T d\Gamma \quad (3.54)$$

となるので，熱伝達係数の値によらず最大化問題として扱える．以上のように，全ポテンシャルエネルギーを目的関数として選択すれば，全ての場合を最大化問題として統一的に扱える．なお，上述の定式化については，構造問題については議論されているが，熱拡散問題についての検討はこれまで皆無であることを付記しておく．

以上より，本研究では最適化問題を以下のように定式化する．

$$\underset{r}{\text{maximize}} F(T) \quad (3.55)$$

制約条件

$$g = \int (1 - r^2) d\Omega \leq V_{\max} \quad (3.56)$$

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (3.57)$$

$$a(\tilde{T}, T) + L_c(\tilde{T}) = L(\tilde{T}) \quad (3.58)$$

ここで,  $V_{\max}$  は体積制約の上限値を示す.

### 3.2.6 内部発熱の取り扱い

ここでは, 最適化過程で変化する設計領域における内部発熱量の定式化について述べる. まず, 領域内における指標関数  $\chi_\Omega$  を用いて領域内にある点  $x$  における内部発熱量  $b(x)$  を次のように表す.

$$\int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega = \int_D \chi_\Omega b \tilde{T} d\Omega \quad (3.59)$$

ここで設計空間の緩和方法として, 式(3.40)を用いる. 各節点に定義した設計変数  $R$  を使えば, 内部発熱量を要素内で  $C^0$  連続な関数として定義でき, 形状変化に対応させることができる. すなわち, 内部発熱量を設計変数  $r(x)$  の関数として, 以下のように離散化する.

$$b(x) \approx b^h(x) = b_0(1 - r^{h2}) \quad (3.60)$$

ここで,  $b^h$  は離散化された内部発熱量,  $b_0$  は図 3.4 において完全稠密とした場合の単位体積あたりの内部発熱量を示す. このように, 内部発熱量を離散化された設計変数を用いて表現することにより, 最適化の過程における材料密度変化に対応して内部発熱量を変化させることができ, 最適構造と内部発熱量の間の整合性をとることができる.

### 3.2.7 最適化アルゴリズム

図 3.8 に最適化問題のアルゴリズムを示す. 図に示したように, 最初に設計変数  $R$  の初期値をもとに, 均質化熱伝導テンソル  $\kappa^H$  を求める. 次に, 有限要素解析により, 釣り合いの方程式を解いて, 節点温度ベクトル  $T$  を求める. その値を用いて, 目的関数, 体積制約の値を求める. 目的関数が収束すれば, アルゴリズムを終了し, そうでなければ目的関数, 体積制約の設計変数  $R$  に関する感度を求める. 得られた感度をもとに, 最適化手法を用いて設計変数  $R$  を更新する. その後, 最初のステップから繰り返す.

なお本研究では, 最適化手法として, 高い収束性は期待できないが, どのような目的関数においても, 設計変数が数万以上の大規模な最適化問題を解くことができる逐次線形計画法 (SLP) を用いる.



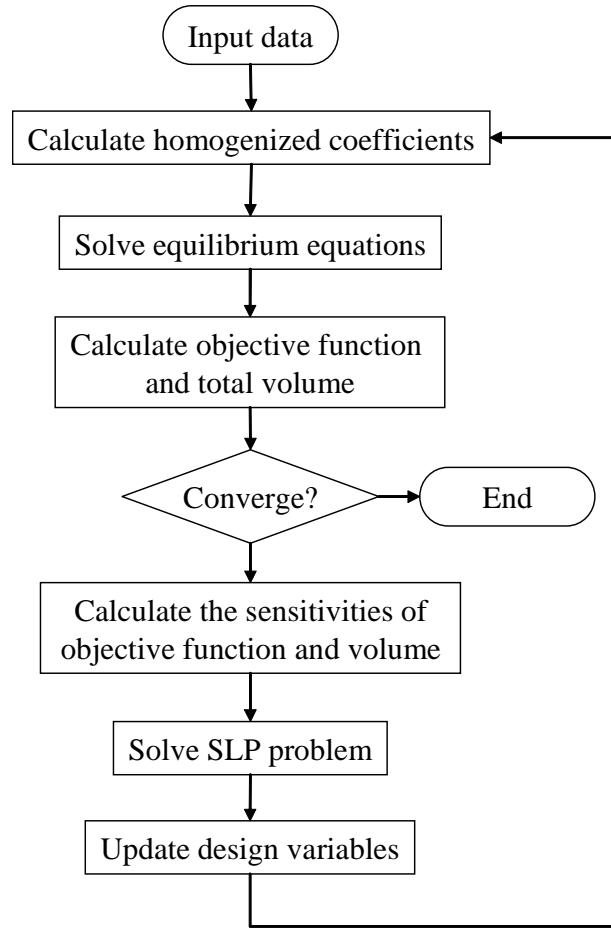


Fig.3.8 Flow chart of optimization method

### 3.2.8 感度解析

SLP により設計変数を更新する際に必要な目的関数  $F$  の設計変数  $R$  に関する感度を導出する．熱伝導体の平衡方程式(3.48)をマトリックス表示すると，

$$(K + K_h)T = q + Q + H \quad (3.61)$$

と書ける．ここで， $K$  は熱伝導マトリックス， $K_h$  は熱伝達マトリックス， $q$  は熱流束ベクトル， $Q$  は内部発熱ベクトル， $H$  は熱伝達ベクトルである．このとき目的関数は次式で表される．

$$F = \frac{1}{2}T^T K T + \frac{1}{2}T^T K_h T - T^T (q + Q + H) = -\frac{1}{2}T^T (q + Q + H) \quad (3.62)$$

この両辺を設計変数  $R$  で微分すれば，

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \mathbf{R}} (\mathbf{q} + \mathbf{Q} + \mathbf{H}) \quad (3.63)$$

この式に対し，式(3.61)を用いれば，

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \mathbf{R}} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_h) \mathbf{T} \quad (3.64)$$

となる．一方式(3.61)の両辺を微分すれば，

$$\frac{\partial (\mathbf{K} + \mathbf{K}_h)}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{T} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_h) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{R}} = 0 \quad (3.65)$$

となり，ここで式(3.65)の左から  $\mathbf{T}^T$  を掛け， $\mathbf{K}$  および  $\mathbf{K}_h$  の対称性を利用すれば，以下のよう  
に感度が求まる．

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \frac{\partial (\mathbf{K} + \mathbf{K}_h)}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{T} \quad (3.66)$$

### 3.3 数値例による提案手法の検証

本章で提案したトポロジー最適化手法の妥当性を確認するために，熱流束境界，内部発熱および熱伝達境界の場合について，2次元の熱拡散問題を解く．なお，いずれの場合においても，熱伝導係数は  $50\text{W/mK}$  に，最適化の初期値は  $R_i = 0.9$  に設定して，最適化を実施した．

#### 3.3.1 熱流束境界を設定した場合

図 3.9 に設計領域を示す．図に示したように， $5\text{m} \times 5\text{m}$  の正方形形状の設計領域の境界  $\Gamma_T$  を  $T=0$  に固定し，境界  $\Gamma_q$  に熱流束  $1\text{W/m}^2$  を与える．このとき境界条件が最適構造に与える影響を検討するため，境界  $\Gamma_T$  および  $\Gamma_q$  の範囲をそれぞれ，(a)  $L_1=0.5$ ， $L_2=0.0$ ， $L_3=0.5$ ，(b)  $L_1=1.5$ ， $L_2=1.0$ ， $L_3=0.5$ ，(c)  $L_1=5.0$ ， $L_2=0.0$ ， $L_3=0.5$ ，(d)  $L_1=5.0$ ， $L_2=0.0$ ， $L_3=5.0$  に変更して最適構造を求めた．なお，体積制約の上限値  $V_{\max}$  は全設計領域の 30% とし，要素分割数は  $50 \times 50$  として最適化を図った．図 3.10 に，図 3.9(c) の設計例について，本研究で提案した最適化手法した場合の最適構造を示す．なお図の白黒の濃淡は材料の正規化された密度分布を示し，白色が完全孔で図 3.4 のユニットセルにおける正方形形状の孔の 1 辺  $r$  が 1 に，黒色が完全稠密で  $r$  が 0 に相応している．なお，後に示す最適構造も同様の方法にて示す．

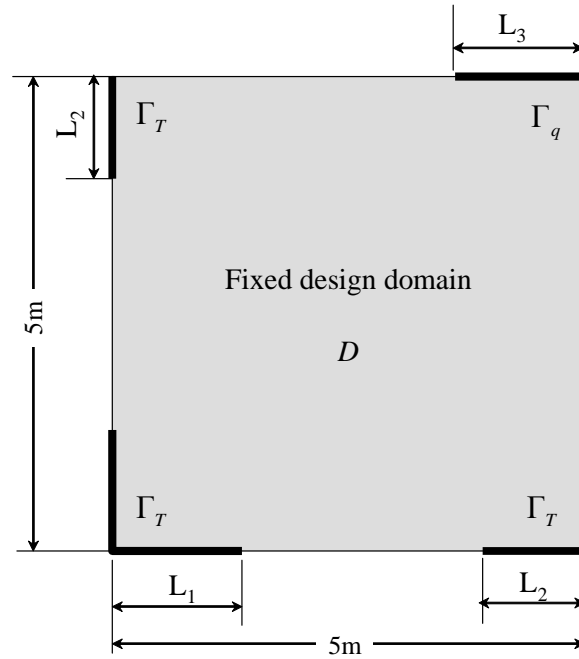


Fig.3.9 Design domain for design problem 1. (a)  $L_1=0.5$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=0.5$ , (b)  $L_1=1.5$ ,  $L_2=1.0$ ,  $L_3=0.5$ , (c)  $L_1=5.0$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=0.5$ , (d)  $L_1=5.0$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=5.0$

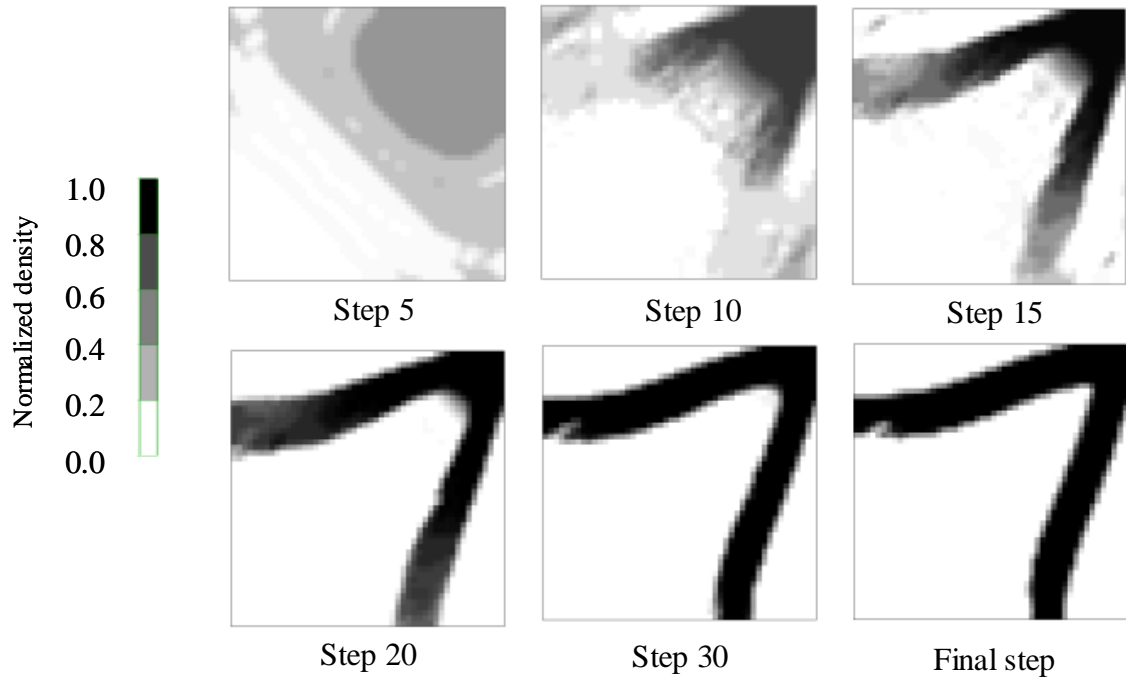


Fig.3.10 History of optimal configuration of design problem 1 (c)

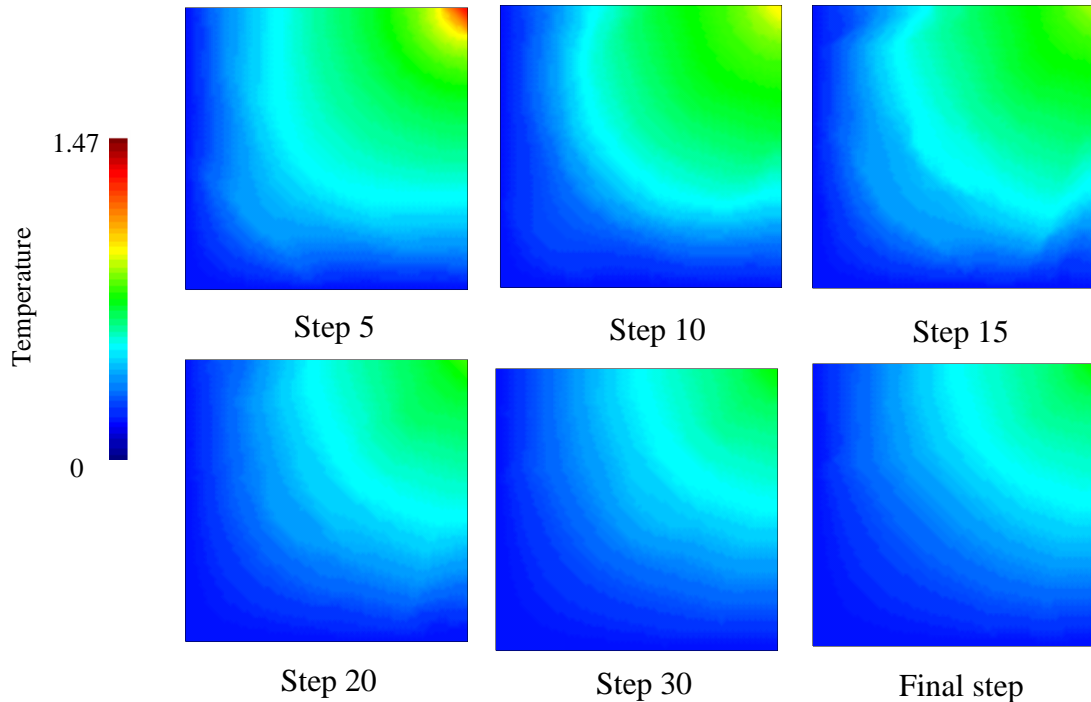


Fig.3.11 History of temperature in optimal configuration of design problem 1 (c)

図に示すように、チェッカーボードは生じておらず、明瞭な最適構造が得られていることが分かる。図 3.11 に 図 3.10 の最適化の過程に現れる構造に対応した温度分布を示すが、設計領域内の温度分布が低減されていることが分かる。

図 3.12(a) ~ (d)には、図 3.9 で設定したそれぞれの設計問題に対して最適化を行った結果を示す。のいずれの場合においても、チェッカーボードは生じておらず、明瞭な最適構造が得られていることが分かる。図 3.12(a)では右上端に熱流束を与え、左下端を 0 としている。このとき最適構造は右上から左下に向かう直線形状となる。これに対して、図 3.12(b)のように温度固定境界を広げると、新たに指定した温度境界に向かって形状が分岐する。さらに図 3.12(c)のように、境界  $\Gamma_T$  として正方形の一辺全域を温度固定すると、熱流束を与えている境界から近い温度固定境界だけでなく、遠い位置の影響をうけるため湾曲した形状になる。さらにこの温度固定で、熱流束を与える境界を図 3.12(d)まで広げると、温度固定境界の影響を受けながら熱流束境界に沿った形状となる。

図 3.13 に図 3.12(a) ~ (d)の最適化過程における目的関数  $F$  の推移を示す。目的関数である全ポテンシャルエネルギーは式(3.67)のように書けることから、目的関数は漸近的に収束し、最大化されていることが分かる。

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} - \mathbf{T}^T \mathbf{q} = -\frac{1}{2} \mathbf{T}^T \mathbf{q} = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{K}} \quad (3.67)$$

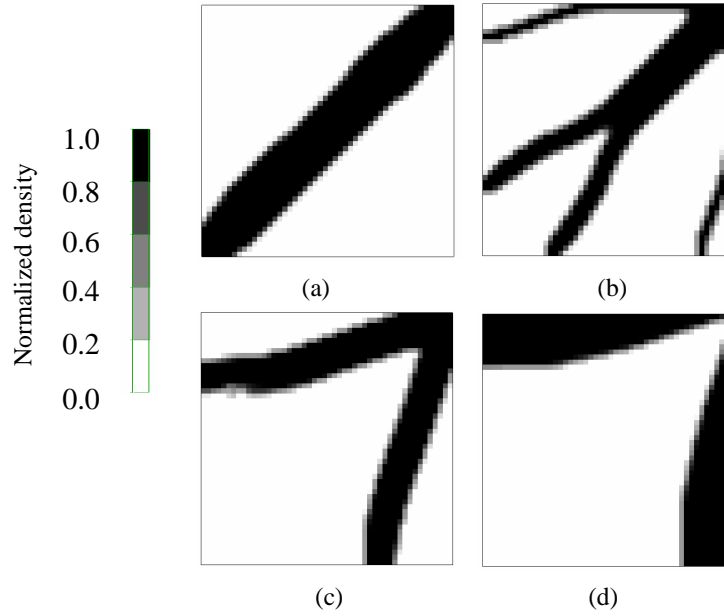


Fig.3.12 Optimal configurations of design problem 1. (a)  $L_1=0.5$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=0.5$ , (b)  $L_1=1.5$ ,  $L_2=1.0$ ,  $L_3=0.5$ , (c)  $L_1=5.0$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=0.5$ , (d)  $L_1=5.0$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=5.0$

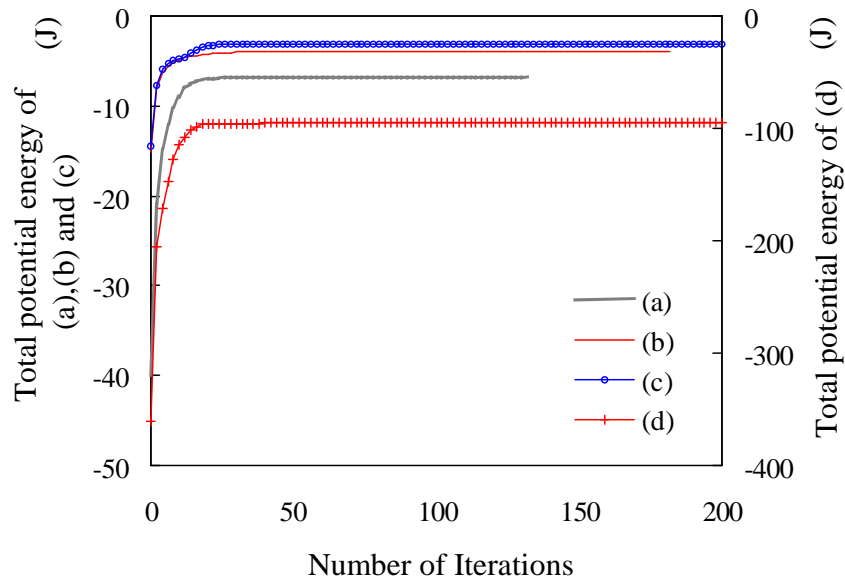


Fig.3.13 Convergence history of design problem 1. (a)  $L_1=0.5$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=0.5$ , (b)  $L_1=1.5$ ,  $L_2=1.0$ ,  $L_3=0.5$ , (c)  $L_1=5.0$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=0.5$ , (d)  $L_1=5.0$ ,  $L_2=0.0$ ,  $L_3=5.0$

### 3.3.2 内部発熱を設定した場合

次に内部発熱を設定した場合を考える．図 3.14 に設計領域を示す．図に示したように， $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  の正方形形状の設計領域の境界  $\Gamma_T$  を  $T=0$  に固定し，境界  $\Gamma_q$  は断熱条件とし，設計領域全体に内部発熱量として  $0.01\text{ W/m}^2$  を与えた場合について最適構造を求める．体積制約の上限値  $V_{\max}$  は全設計領域の 40% とし，要素分割数は  $200 \times 200$  として最適化を図った．このとき，内部発熱量の設計変数依存性の有無が最適構造へ与える影響を検討するため，(a) 内部発熱量の設計変数依存性考慮無し，(b) 考慮有りの場合で，最適構造を求めた．

図 3.15(a)，(b) に，内部発熱量の設計変数依存性の有無による最適構造の比較を示す．図 3.15(a) に示すように，内部発熱量を一定とすると，設計領域内の全域にわたって存在する内部発熱量を境界  $\Gamma_T$  へ拡散させるため，最適構造として，対角線付近から伸びる細かなフィンが現れる．一方，設計変数に依存させれば，境界  $\Gamma_T$  から遠い領域は，材料密度に加え，内部発熱量も小さくなるため，図 3.15(b) に示すように，フィンを残しつつ，より境界  $\Gamma_T$  近傍に偏った最適構造が現れる．

図 3.16 に内部発熱量を一定とした場合と，設計変数に依存させた場合の最適化過程における目的関数  $F$  の推移を示す．密度が低い状態から最適化を開始しているため，最適化の初期には，体積制約条件の上限の 40% になるまで密度増加する．内部発熱を設計変数依存にすると，密度増加に伴い内部発熱量も増加する．そのため，平均温度は増加，つまり全ポテンシャルエネルギーは減少する．体積が制約条件の上限まで達すると，次のステップからは体積制約条件の上限を維持しながら，平均温度を最小化するので，全ポテンシャルエネルギーは増加に転じ収束する．

このように内部発熱量の設計変数依存性の有無により最適構造は異なる．したがって，内部発熱量の取り扱いによっては，求めるべき最適構造および実際の内部発熱量に差異が生じる可能性がある．そして，内部発熱量が設計変数に依存する場合には，本手法のように，有限要素の各節点で  $C^0$  連続な関数として表せば，より実際に近い内部発熱状況を考慮した最適構造が得られると考えられる．

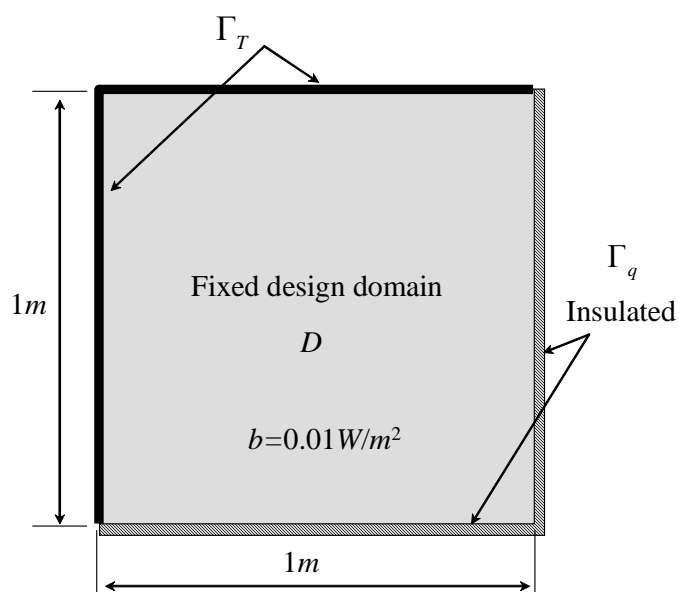
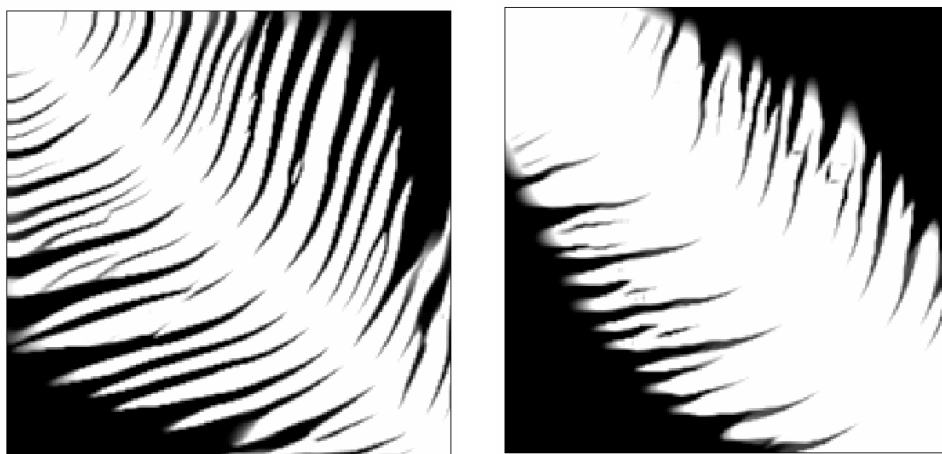
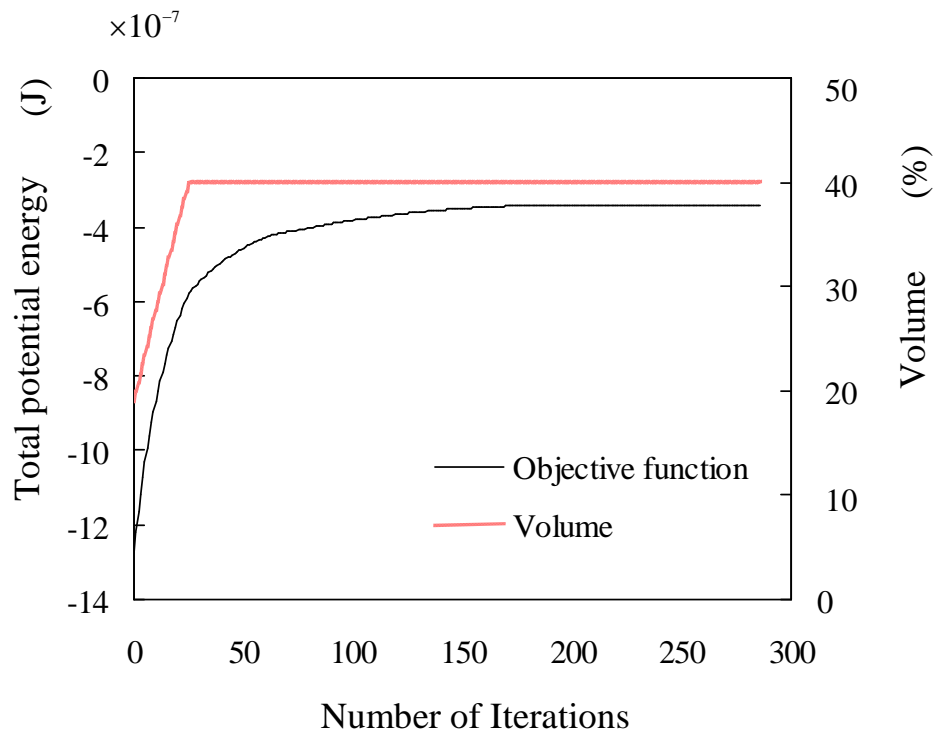


Fig.3.14 Design domain for design problem 2

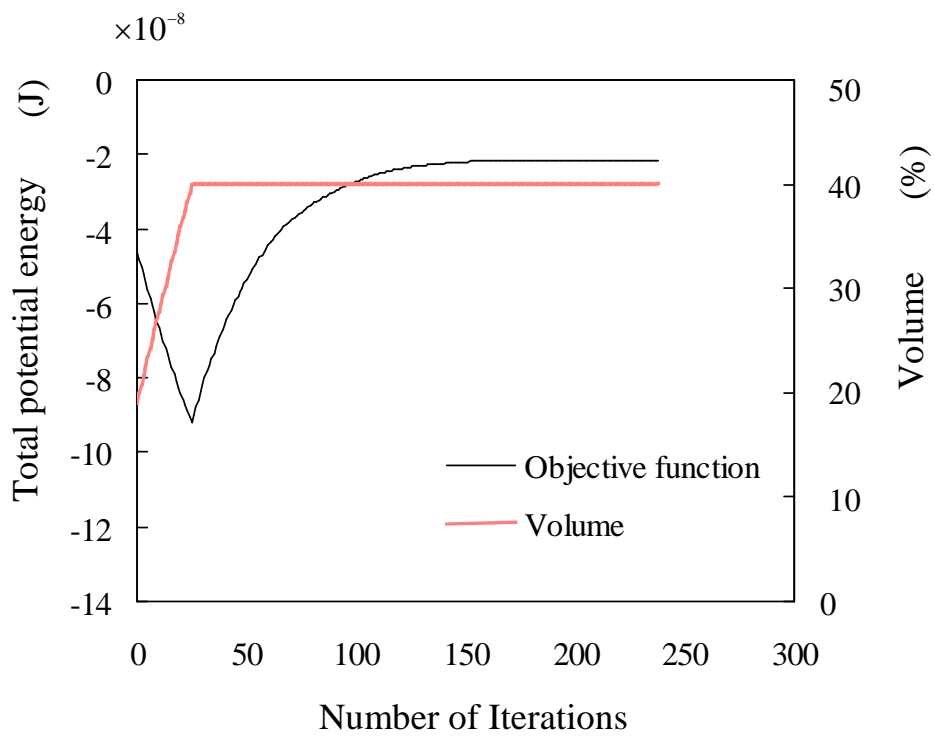


(a) without dependency on design variables (b) with dependency on design variables

Fig.3.15 Optimal configurations of design problem 3. (a) without dependency on design variables (b) with dependency on design variables



(a) without dependency on design variables



(b) with dependency on design variables

Fig.3.16 Convergence history of design problem 2



### 3.3.3 熱伝達境界を設定した場合

次に、熱伝達境界を指定した場合を考える．図 3.17 に設計領域を示す．図に示したように、 $5\text{m}\times 5\text{m}$  の正方形形状の設計領域の境界辺にそれぞれ、熱伝達境界  $\Gamma_{h1}$  および  $\Gamma_{h2}$  を指定する．体積制約の上限値  $V_{\max}$  は全設計領域の 30% とし、要素分割数は  $50\times 50$  として最適化を図った．このとき、熱伝達係数の値が最適構造に与える影響を検討するため、図 17 (a) ~ (c) に示すように、境界  $\Gamma_{h1}$  および  $\Gamma_{h2}$  の各々で熱伝達係数  $h_1$ 、 $h_2$  を変化させて最適構造を求めた．図 3.18 (a) ~ (c) に最適構造を示す．最適構造は、熱伝達係数の大きさにより変化する．熱流束を境界条件として指定した場合は、最適構造は熱流束を与える境界の長さの影響を受けるが、熱流束の値の影響により変化することはない．しかし、熱伝達境界を指定した場合は、要素熱伝導マトリックス成分と比較して十分大きい熱伝達係数を与えると、最適構造は温度固定の特徴を持つ構造に変化していく．これは、熱伝達係数を十分大きくとると、境界辺上の温度が周囲温度に固定され、実質的に温度固定と等価になることに起因する．このとき全ポテンシャルエネルギーを目的関数にとれば、図 3.19(a) に示すようにすべての場合について、最大化問題として扱える．これに対して、平均温度を目的関数にした場合の収束履歴を示したのが図 3.19(b) である．3.2.5 節で示したように、熱伝達係数の値によって、目的関数の最大化もしくは最小化により熱拡散が最大化されていることがわかる．

以上の結果をまとめると、本論文で提唱した方法論により、線形熱伝導体の熱拡散最大化を目的とした構造最適化が可能であり、このとき全ポテンシャルエネルギーを目的関数とすれば、Neumann 型および Dirichlet 型境界条件の両方に対して、目的関数の最大化問題として統一的に扱うことができる．

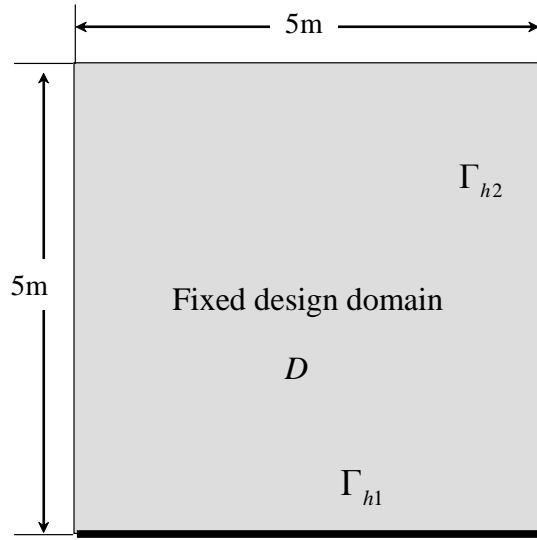


Fig.3.17 Design domain for design problem 1. (a)  $h_1=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb1}=0^\circ\text{C}$ ,  $h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb2}=100^\circ\text{C}$  (b)  $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb1}=0^\circ\text{C}$ ,  $h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb2}=100^\circ\text{C}$  (c)  $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb1}=0^\circ\text{C}$ ,  $h_2=1000.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb2}=100^\circ\text{C}$

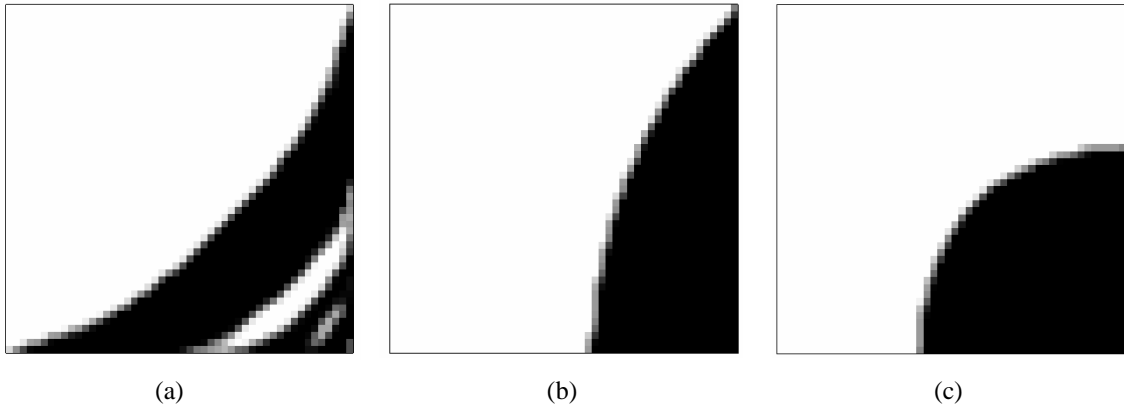
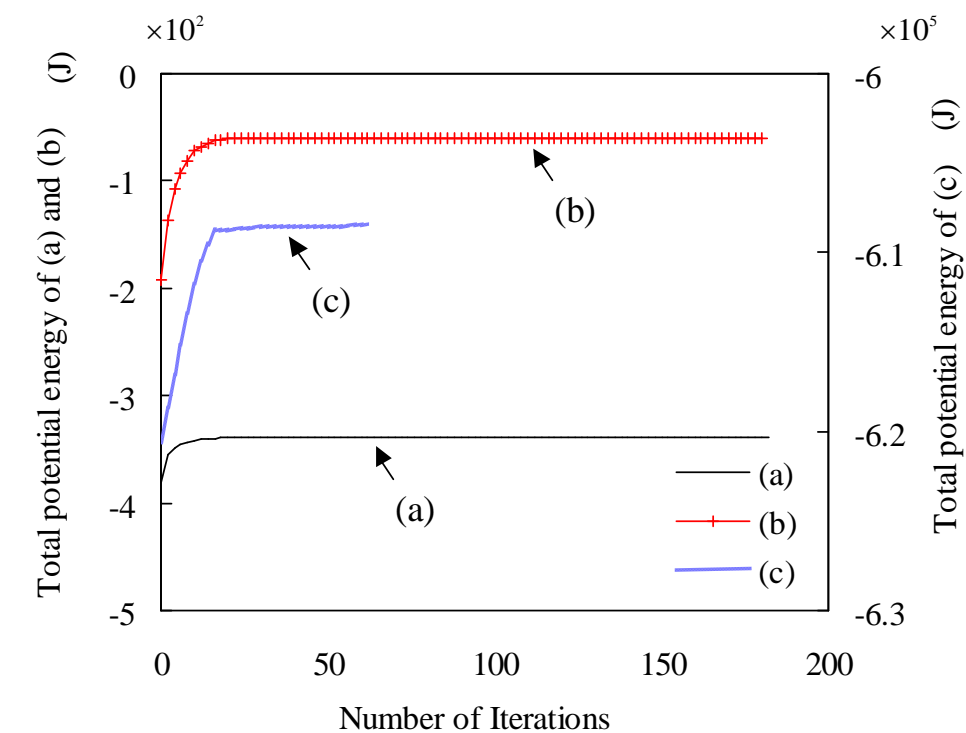
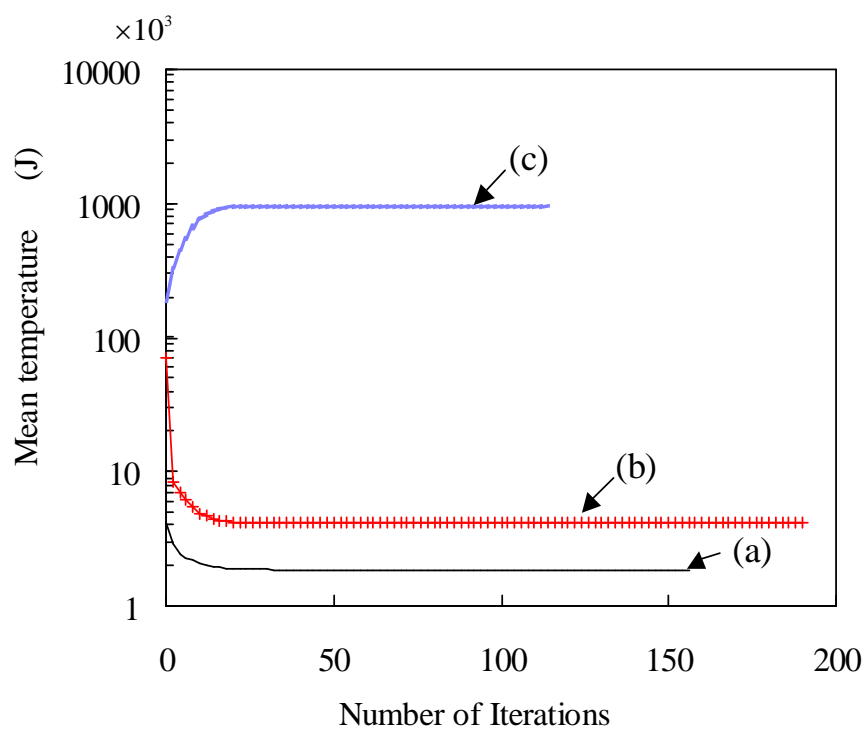


Fig.3.18 Optimal configurations of design problem 3. (a)  $h_1=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb1}=0^\circ\text{C}$ ,  $h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb2}=100^\circ\text{C}$  (b)  $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb1}=0^\circ\text{C}$ ,  $h_2=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb2}=100^\circ\text{C}$  (c)  $h_1=1000.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb1}=0^\circ\text{C}$ ,  $h_2=1000.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb2}=100^\circ\text{C}$



(a) Total potential energy



(b) Mean temperature

Fig.3.19 Convergence history of design problem 3

### 3.4 まとめ

本章では、均質化法に基づいた線形熱伝導体の最適設計手法を提案するとともに、簡単な最適設計問題により、本章で提案する方法の妥当性を検証した。得られた結果を以下に示す。

- (1) 構造物の熱拡散問題に対して、材料分布の連続性を仮定した、均質化法に基づく新しいトポロジー最適化手法を構築した。
- (2) Neumann 型および Dirichlet 型境界条件の両方に対して、目的関数の最大化問題として統一的に扱える全ポテンシャルエネルギーを目的関数として、熱拡散の最大化問題を定式化するとともに、均質化法と逐次線形計画法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築した。
- (3) 有限要素モデルの節点ごとに離散的な設計変数を定義し要素内の分布を  $C^0$  連続な形状関数によって近似することにより、連続的な材料密度や、材料密度に依存する内部発熱量を定式化した。また最適化に必要な設計変数に対する感度も導出した。
- (4) 温度固定、熱流束、熱伝達境界の境界条件に対して、熱流束および温度固定境界の範囲および熱伝達係数が最適構造へ与える影響を検討した。また内部発熱の設定方法と最適構造の関係についても検討を行った。得られた最適構造は、各境界条件に応じた物理的に妥当な構造であり、本手法の有効性を示すことができた。



## 第 4 章

# 熱伝達問題に対するトポロジー最適化

第 3 章において、トポロジー最適化の熱拡散問題への適用を行った。しかし本手法を含めて従来のトポロジー最適化によって得られる最適構造は、設計領域の密度分布として表現されるため、明確な外形形状を表現できない。そのため熱伝達境界条件などのように、固定設計領域内において、最適構造を示す領域の境界（以後、物体境界と記す）を必要とする問題については、その境界を明示的に定義できないため、取り扱うことが難しいという問題点をもつ。近年、上述の問題を解決するため、剛性問題を対象として、物体境界に直接圧力荷重を作用させるのではなく、非構造部分に仮想的な流体要素を配置し、物体境界に圧力を作用させる方法が提案されている [33] [34] [35]。しかしこの方法は、圧力荷重が作用する問題に特化した方法で、熱拡散問題への適用は難しい。

他方、Ryu と Kim [39] は、熱拡散問題を対象とし、設計変数依存性を有した形状関数を用いて、これにより生じる要素間の温度分布の不連続性を利用した熱伝達境界の抽出および熱伝達係数の設定方法を提案している。また、Bruns [40] は、隣接する要素密度の差によって物体境界を抽出する方法を提案している。しかしいずれの方法論も、形状変化により生じる熱伝達係数の局所的な変化を考慮することはできていない問題点をもつ。

そこで本章では、以上のような物体境界における熱伝達境界条件設定に関する問題を解決するために、構造物の熱拡散問題に対して、設計変数依存性を考慮可能な熱伝達境界条件のある、新しい熱拡散問題に関する最適化手法を定式化するとともに、そのアルゴリズムを示す。さらに簡単な数値例により、本章で提案する方法論の妥当性を検証する。

## 4.1 熱伝達境界を考慮した熱拡散最大化問題の定式化

### 4.1.1 熱拡散問題の定式化

境界  $\Gamma_T$  において温度が  $T = 0$  に固定され、境界  $\Gamma_c$  には温度境界条件  $T = c \neq 0$ 、境界  $\Gamma_q$  には熱流束境界条件、境界  $\Gamma_h$  には熱伝達境界条件が与えられ、さらに領域  $\Omega_d$  内部には内部発熱が与えられている 2 次元設計領域を  $\Omega_d$  とする熱拡散問題について考える。このとき温度場の釣り合い式を弱形式で記述すれば次式となる。

$$\int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \mathbf{k} \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{T} h T d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \nabla \tilde{T} \mathbf{k} \nabla c d\Gamma = \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \quad \forall \tilde{T} \in V \quad (4.1)$$

ここで  $q$  は熱流束,  $h$  は熱伝達係数,  $T_{amb}$  は周囲温度である. また, 仮想温度  $\tilde{T}$  を定義する空間  $V$  は次のようである.

$$V = \left\{ \tilde{T} \mid \tilde{T}|_{\Gamma_i} \in H^1(\Omega_d) \text{ and } \tilde{T} = 0 \text{ on } \Gamma_T, \tilde{T} = c \text{ on } \Gamma_c \right\} \quad (4.2)$$

ここで, 式(4.1)の両辺をそれぞれ

$$a(\tilde{T}, T) = \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \mathbf{k} \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{T} h T d\Gamma \quad (4.3)$$

$$L_c(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_c} \nabla \tilde{T} \mathbf{k} \nabla c d\Gamma = \int_{\Gamma_c} q_{react}(\tilde{T}) c d\Gamma \quad (4.4)$$

$$L(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \quad (4.5)$$

と定義すると式(4.1)は, 以下のように書ける.

$$a(\tilde{T}, T) + L_c(\tilde{T}) = L(\tilde{T}) \quad (4.6)$$

ここで  $q_{react}$  は境界  $\Gamma_c$  に作用する反熱流束を示す.

次に構造物の熱拡散最大化問題における目的関数を定式化する. ここで, 目的関数として, 構造問題における平均コンプライアンスに相当する次式で表される平均温度を定義する.

$$T_{mean} = \int_{\Gamma_q} q T d\Gamma + \int_{\Omega_d} b T d\Omega + \int_{\Gamma_h} h (T_{amb} - T) T d\Gamma + \int_{\Gamma_c} q_{react}(T) c d\Gamma \quad (4.7)$$

平均温度を目的関数とした場合, 熱拡散最大化の最適化問題は, (a) 熱流束境界, (b) 内部発熱, (c) 温度境界, (d) 熱伝達境界に対して, 目的関数の最大化もしくは最小化となり統一的に扱えない. そこで第3章と同様に, 次式の全ポテンシャルエネルギーを目的関数として最適化問題を定義する.

$$F(T) = \frac{1}{2} a(T, T) - L(T) = -\frac{1}{2} L(T) \quad (4.8)$$

上式を用いれば, 最適化問題を, 目的関数の最大化問題として統一的に扱える. すなわち, すべての熱境界条件に対して全ポテンシャルエネルギーを最大化することにより, 最も低い温度場を得, 結果として熱伝導体の熱拡散を最大化できる. 本章でも第3章と同様に,

この目的関数を用いて最適化問題を以下のように定式化する．

$$\underset{r}{\text{maximize}} \quad F(T) \quad (4.9)$$

制約条件

$$g = \int (1 - r^2) d\Omega \leq V_{\max} \quad (4.10)$$

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (4.11)$$

$$a(\tilde{T}, T) + L_c(\tilde{T}) = L(\tilde{T}) \quad (4.12)$$

ここで， $V_{\max}$  は体積制約の上限値を示す．

#### 4.1.2 物体境界の抽出および熱伝達境界条件の設定方法

前述のように，通常トポロジー最適化では，固定設計領域内の物体境界を明示的に表現できないため，境界条件を設定する上で物体境界を必要とする熱伝達境界条件などを扱うことが難しいという問題点がある．そこでまず，この問題を克服する方法として，トポロジー最適化において，固定設計領域内の物体境界に熱伝達境界条件を設定するための物体境界抽出方法について述べる．

図 4.1 に，トポロジー最適化により得られた最適構造の 1 例を示す．図に示すように最適構造は，正規化密度の分布によって表現される．

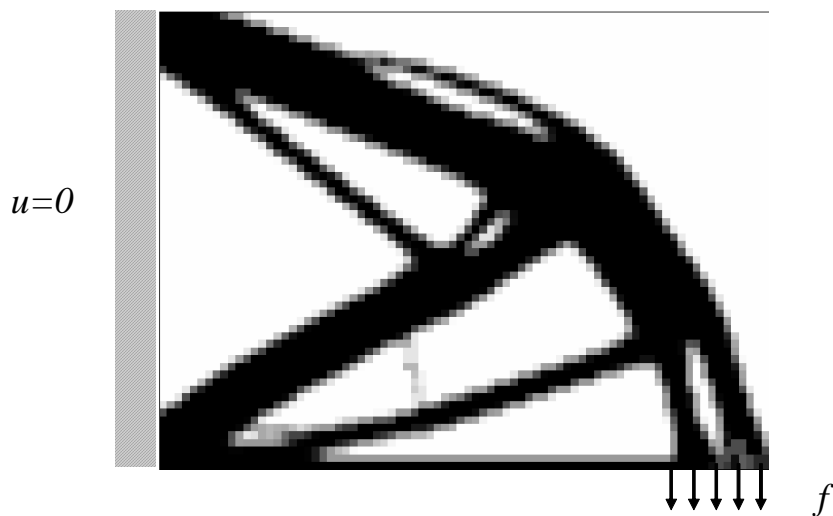


Fig.4.1 Result of cantilever beam optimization.



そのため、図 4.2 に示すように、最適化の過程では、構造と非構造の間に、グレースケールと呼ばれる中間密度領域が存在し、この中間密度領域は、非構造から構造への遷移領域とも考えられる。そこで、このグレースケール領域を物体境界として抽出するため、図 4.2 に示す Hat 関数を用いる。この Hat 関数を用いれば、特定の密度の要素集合を物体境界として抽出できる。

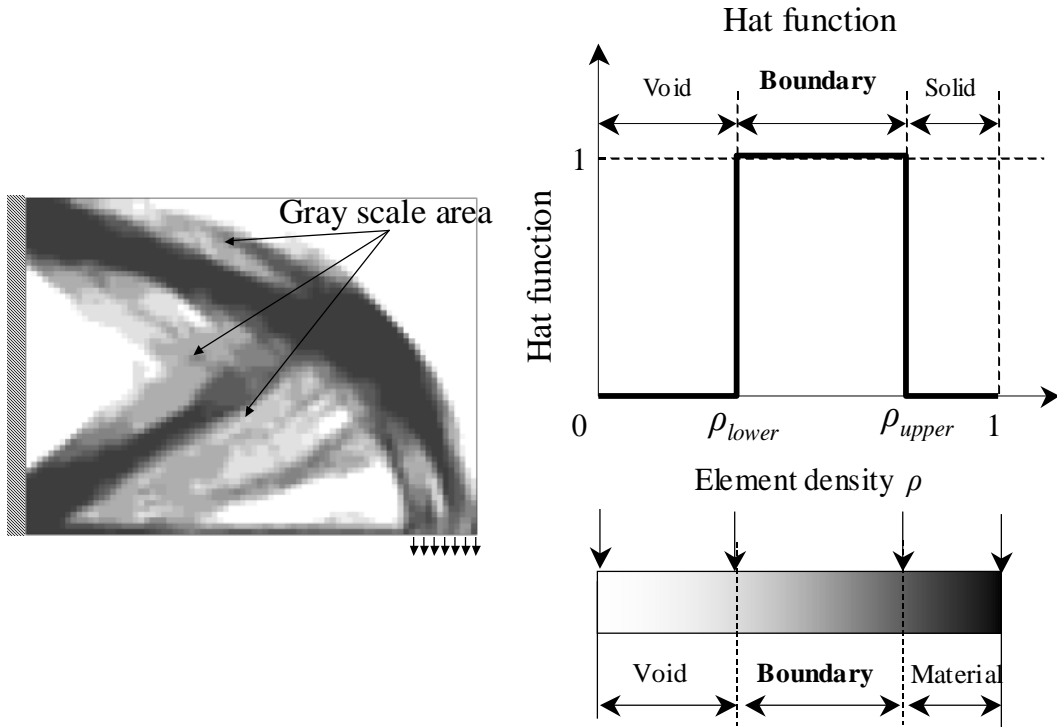


Fig.4.2 Method for dealing with structural boundaries

実際には、数値的取扱いを考慮して、以下の近似 Hat 関数を用いて物体境界の抽出を行う。

$$H_a(\rho_e) = \begin{cases} 0 & \rho_e < \rho_{lower} - \varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{(\rho_e - \rho_{lower})}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin \left\{ \frac{\pi(\rho_e - \rho_{lower})}{\varepsilon} \right\} & \rho_{lower} - \varepsilon < \rho_e < \rho_{lower} + \varepsilon \\ 1 & \rho_{lower} + \varepsilon < \rho_e < \rho_{upper} - \varepsilon \\ \frac{1}{2} - \frac{(\rho_e - \rho_{upper})}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \sin \left\{ \frac{\pi(\rho_e - \rho_{upper})}{\varepsilon} \right\} & \rho_{upper} - \varepsilon < \rho_e < \rho_{upper} + \varepsilon \\ 0 & \rho_{upper} + \varepsilon < \rho_e \end{cases} \quad (4.13)$$

図 4.3 に示すように，上記の関数は Hat 関数の 0 から 1 への遷移領域での数値的不安定性を回避するために，遷移パラメータ  $\varepsilon$  を導入した関数である．ここで， $\rho_e$  は，有限要素の要素密度を表し，節点で求めた密度から要素平均として算出する．また  $\rho_{lower}$  と  $\rho_{upper}$  は，物体境界を抽出するために設定する密度値である．すなわち，要素密度が  $\rho_{lower}$  より小さい値を持つ要素は非構造を， $\rho_{upper}$  よりも大きい領域は構造を示し， $\rho_{lower} \leq \rho_e \leq \rho_{upper}$  の密度範囲にある要素が物体境界となる．

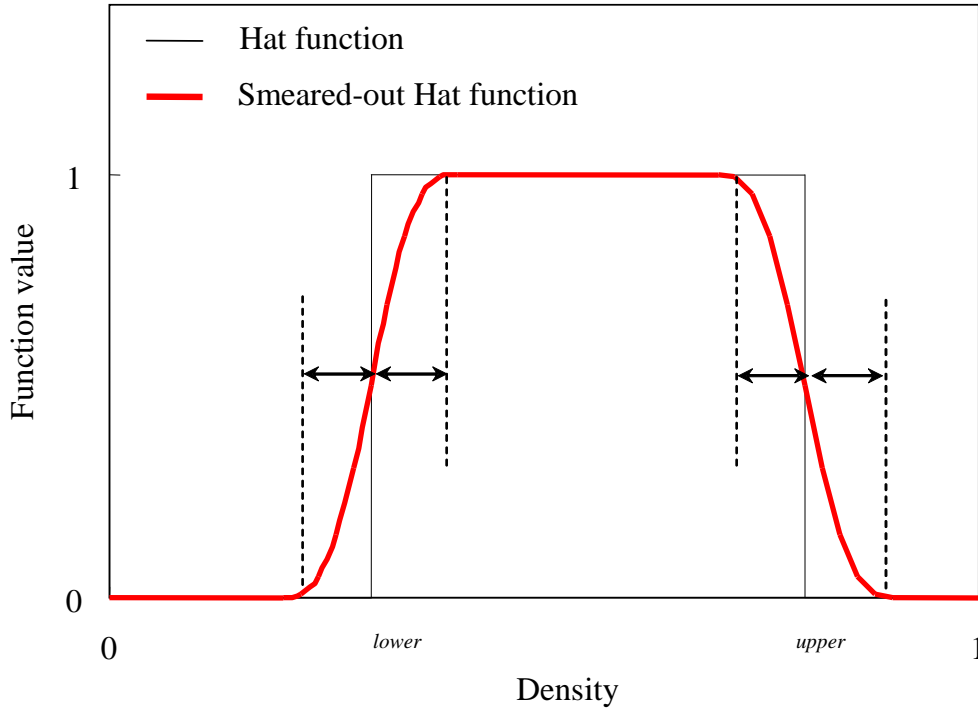
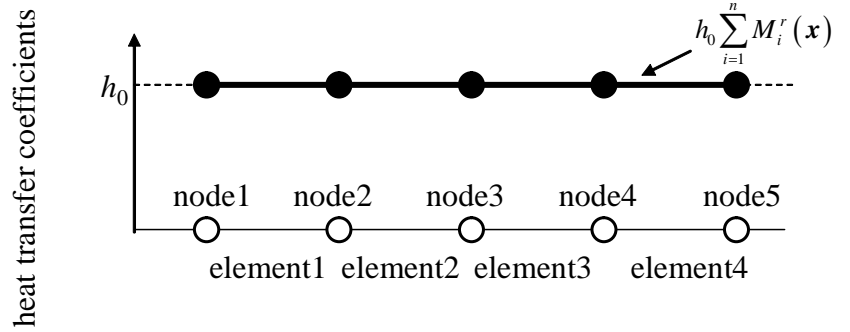


Fig.4.3 Hat function and smeared-out Hat function

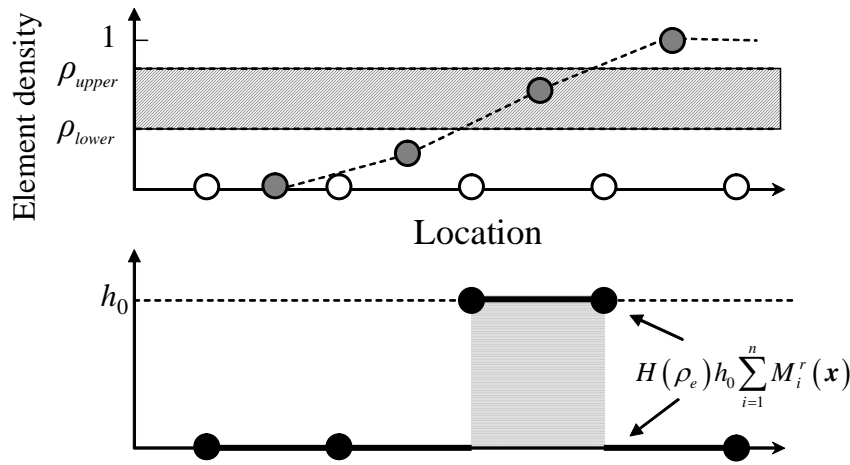
次に，前節で抽出した物体境界に熱伝達係数を設定する方法を示す．本研究では，熱伝達境界条件を物体境界に設定するため，図 4.4(a)に示すように固定設計領域を離散化した有限要素モデルの全節点に，熱伝達係数  $h_0$  を配置し，形状関数  $M_i'(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を構成要素とする形状関数ベクトルを用いて熱伝達係数が固定設計領域内に均一分布しているように設置する．このとき，図 4.4(b)に示すように，式(4.13)を用いれば，固定設計領域内で抽出された物体境界にのみ熱伝達係数を設定でき，かつ熱伝達境界条件は物体境界上で  $C^0$  連続性を確保することができる．つまり，熱伝達係数を以下のように設定する．なお，

形状関数  $M_i^r(x)$  には双一次関数を用いた。

$$h(x) \approx h^h(x) = H(\rho_e) \mathbf{M}^r(x) \mathbf{h} = H(\rho_e) h_0 \sum_{i=1}^n M_i^r(x) \quad (4.14)$$



(a) Initial setting of heat transfer coefficients



(b) Setting of heat transfer coefficients on structural boundary

Fig.4.4 Schematic view of setting method of heat transfer coefficients

#### 4.1.3 形状依存性をもつ熱伝達係数の設定方法

物体表面の熱伝達係数は表面を流れる流体の速度と関係がある．実際の構造物においては，形状により物体表面の流れは変わるので熱伝達係数も場所により異なる．図 4.5 に，数値流体解析を用いた，四角柱内の流れの解析結果を示す．図中で，赤色が流速の早い領域を示し，上部のグラフには，壁面に沿った熱伝達係数を示す．図に示すように，構造表面の熱伝達係数は一定値ではなく，形状変化に伴う流速の変化により，大きく変化することがわかる．

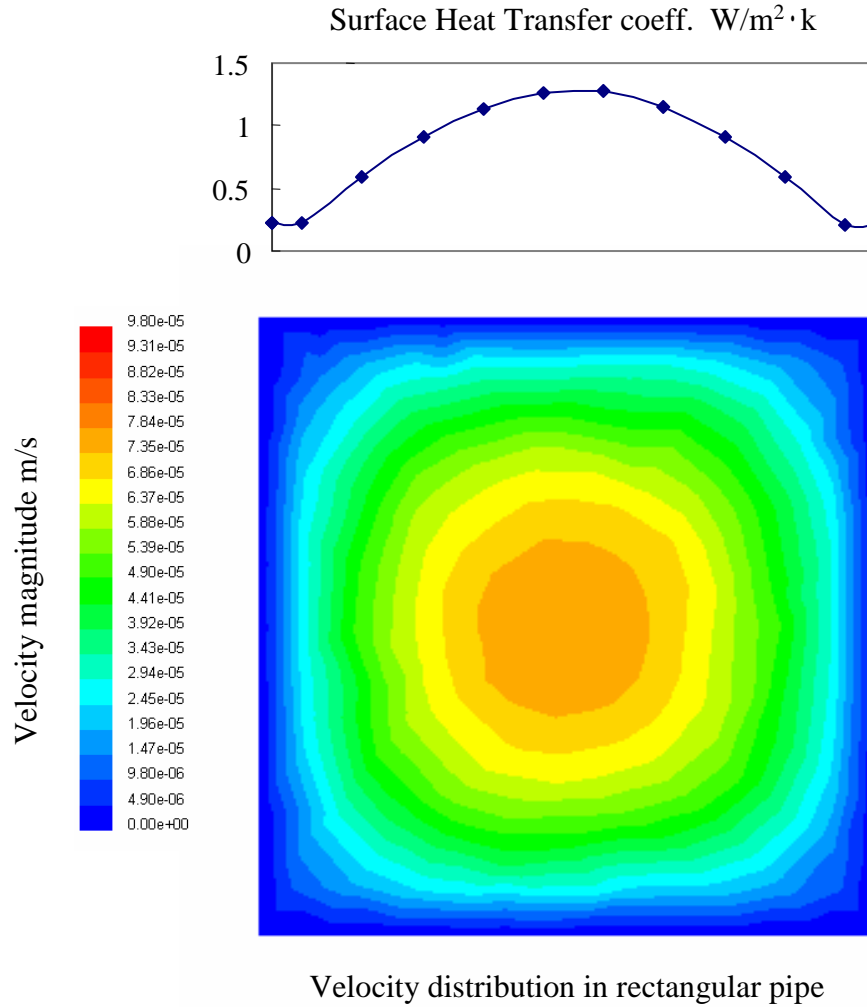


Fig.4.5 Velocity and heat transfer coefficient distribution in rectangular pipe

このような，形状，流速，熱伝達係数の関係に対しては，これまで多くの実験的研究がなされている．例えば式(4.15)，(4.16)は管内乱流熱伝達係数に関する Dittus と Boelter の実験式 [52] である．

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \quad (4.15)$$

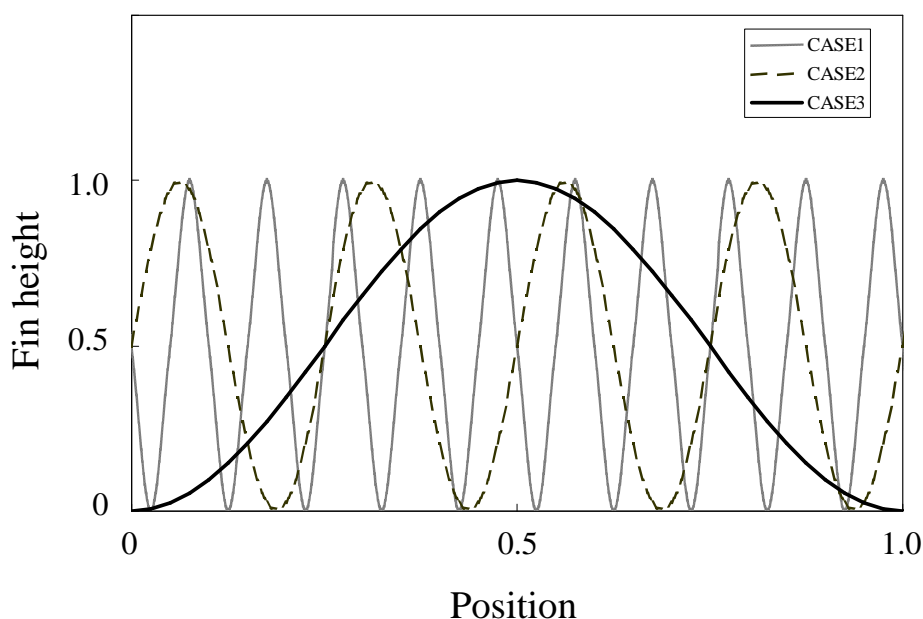
$$h = \frac{\lambda}{d} Nu \quad (4.16)$$

ここで  $Nu$ ， $Re$ ， $Pr$ ， $d$  は，ヌッセルト数，レイノルズ数，プラントル数，管径を示す．なお上式は，レイノルズ数およびプラントル数が， $10^4 < Re < 10^5$ ， $10^4 < Pr < 10^5$  の場合に成り

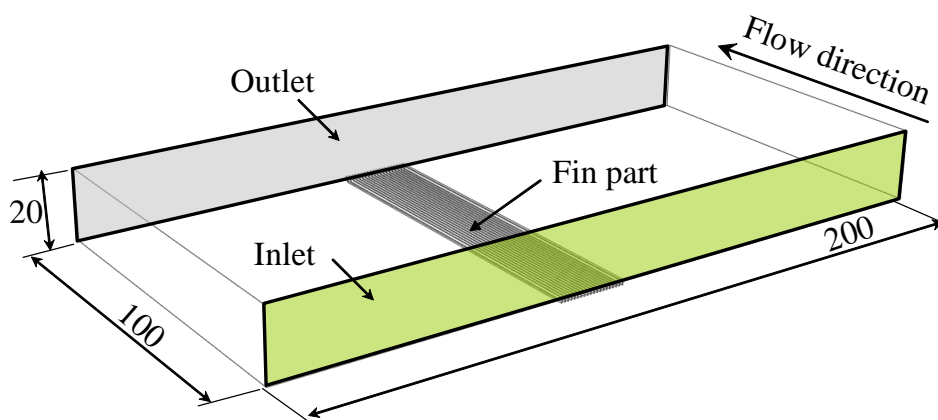
立つことを付記しておく．上式に示すように，熱伝達係数は，レイノルズ数，つまり流速に強い依存性がある．そのため，最適化の際に物体境界に設定する熱伝達係数は，形状による流速変化を考慮して設定する必要がある．さらにトポロジー最適化では，最適構造を求める過程において刻々と構造が変化するため，熱伝達係数は形状依存性に加えて，最適化の過程で生じる構造変化にも対応させる必要がある．しかし従来の手法 [33] [34] [38] [39] [40] では，物体境界の抽出方法にのみ注力されており，熱伝達係数の形状依存性については検討されていない．

このような流速と熱伝達係数の関係を厳密に定量化するには，流体と構造の連成解析を行うことが考えられる．しかし，最適化の過程でこれらを厳密に行うことは計算時間の観点で得策ではない．さらに，設計の初期段階の構想設計においては，厳密な形状を必要とする流体と構造の連成解析により熱伝達係数の算出法を扱うよりも，最低限性能を評価できる簡略形状を用いた算出法を用いた方が，本質的には，より早く素性の良い設計案を創出できると考えられる．そこで本研究では，トポロジー最適化における熱伝達係数の設定方法に対して，形状変化により生じる熱伝達係数の変化を，形状の簡略表現を行うための代表特性値で表す代理モデルで表し，トポロジー最適化によって得られた物体境界の情報と上述の代理モデルから，熱伝達係数を更新する方法を提案する．以下，その方法について詳細を述べる．

最初に，簡略された形状と熱伝達係数の関係を定量化するため，単純な形状の数種類のフィンを持つモデルに対して，流体解析を行う．なお本研究では図 4.6(1)に示す，フィン高さが同一で周期の異なる 3 種類の正弦関数で表されるモデル CASE(1)～(3)に対して流体解析を行い，形状と熱伝達係数の関係を求める．図 4.6(2)に流体解析モデルを示す．



(1) Numerical fluid simulation models of CASE (1), (2) and (3)



(2) Numerical fluid simulation models in Fluent

Fig.4.6 Setting of numerical fluid simulation

図に示すように，計算領域の中央下部に図 4.6(1)で示したフィン形状を配置した．境界条件は，入口条件として，流体温度を  $0$  ，入口流速を  $1\text{m/s}$ ，出口条件は大気開放とし，壁温度は  $20$  とした．なお，流体解析には，汎用コードである ANSYS 社の FLUENT [53] を用いた．次に，熱伝達係数と関連付けるパラメータを設定する．図 4.7 に示すように，解析モデルのフィンの境界上の各ポイントにおいて半径  $r_a$  の円を設定し，円内に含まれるフィン

の面積  $S$  の割合を各ポイントの密度  $\rho$  として以下のように定式化する．なお本研究では， $r_a$  は円の直径が図 4.6(1)の解析モデルにおける最小フィン周期と一致するように決めた．

$$\rho = \frac{A}{\pi r_a^2} \quad (4.17)$$

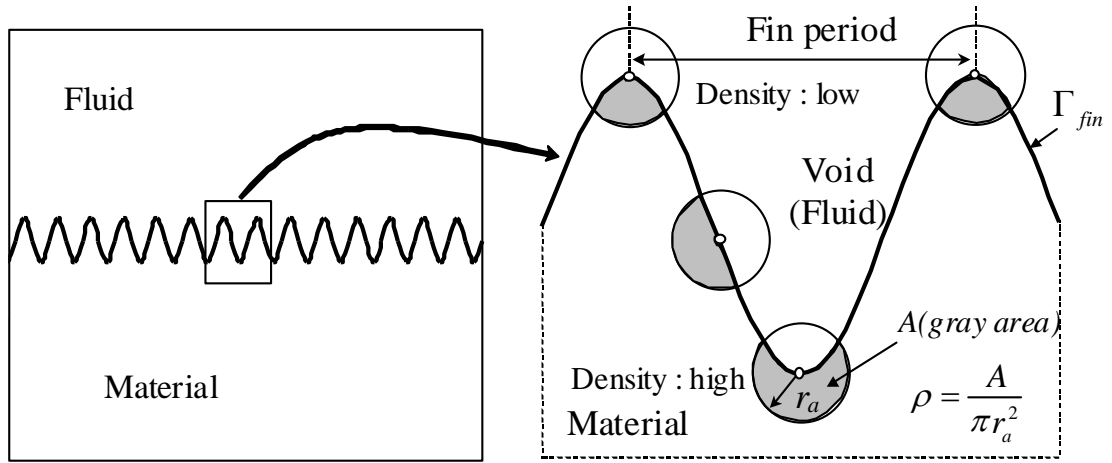


Fig.4.7 Material density in a numerical fluid simulation model

次にフィンの周期を設定する．図 4.7 に示すように，フィン境界上で最も密度が低いポイントがフィン先端と考えられる．また式(4.17)に従えば，フィン先端の密度は，周期が短いほど低くなる．そこで，フィン先端の密度をフィンの周期  $P$  の代用値とし，以下のように設定する．

$$P = \min \rho \quad \text{on } \Gamma_{fin} \quad (4.18)$$

ここで  $\Gamma_{fin}$  は，フィンの境界を示す．

次に，式(4.17)，(4.18)によって求めた密度およびフィンの周期を用いて，代理モデルを作成する．本研究では，式(4.19)に示す，Radial Basis Function(以後 R.B.F と記す)に基づき代理モデルを作成した[54]．基底関数には linear-splines を用いている．なお，フィンの周期  $P$  およびフィンの境界部分の熱伝達係数  $h_0$  は，最大値を 1 として正規化している．

$$h_0(z) = \sum_{j=1}^m a_j g_j(z) + a_{m+1} \quad (4.19)$$

ここで,  $z = \{\rho, P\}^T$  はサンプル点の座標,  $g_j(z) \equiv g(\|z - z_j\|)$  は基底関数,  $m$  はサンプル点の数を示し,  $a_j (j=1, 2, \dots, m+1)$  を決定するために, 以下の方程式を解く.

$$\sum_{j=1}^m a_j g_j(z_i) + a_{m+1} = h_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (4.20)$$

$$\sum_{j=1}^m a_j = 0 \quad (4.21)$$

ここで,  $h_i$  はサンプル点  $i$  における熱伝達係数を示す. 図 4.8 に得られた代理モデルの応答を示す. これより, 熱伝達係数は, 密度の低いフィン先端で最も大きな値をとり, 密度の高い谷部で最小となることがわかる. これは, フィンの谷部では, 先端部に比べ流速が落ちるため, それに伴い熱伝達係数が低下することと対応している.

次に, 代理モデルのパラメータ  $\rho$  および  $P$  に対応する量をトポロジー最適化で得られた密度分布から抽出する方法について述べる. まず, トポロジー最適化で得られた密度分布に対して, 式(4.13)を用いて物体境界を抽出する. このとき, 式(4.17)を用いて物体境界上の各節点において, 半径  $r_a$  内にある節点密度の平均値を算出し, これを  $\rho$  とする. さらに式(4.18)に従ってフィンの周期  $P$  を求める. これらを式(4.19)に代入することにより, 熱伝達係数を更新する. すなわち, 式(4.19)を用いて式(4.14)を以下のように書く.

$$h(\mathbf{x}) \approx h^h(\mathbf{x}) = H(\rho_e) \mathbf{M}^r(\mathbf{x}) \mathbf{h} = H(\rho_e) \sum_{i=1}^n M_i^r(\mathbf{x}) h_0(\rho_i, P) \quad (4.22)$$

ここで,  $\rho_i$  は  $i$  番目の節点の密度を表す. 式(4.22)を用いれば, 式(4.3), (4.5)は以下のようなになる.

$$a(\tilde{T}, T) = \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_{Dh}} \tilde{T} h T d\Gamma \quad (4.23)$$

$$L(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_{Dh}} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \quad (4.24)$$

ここで,  $\Gamma_{Dh}$  は, 近似 Hat 関数によって抽出された要素境界を示す.



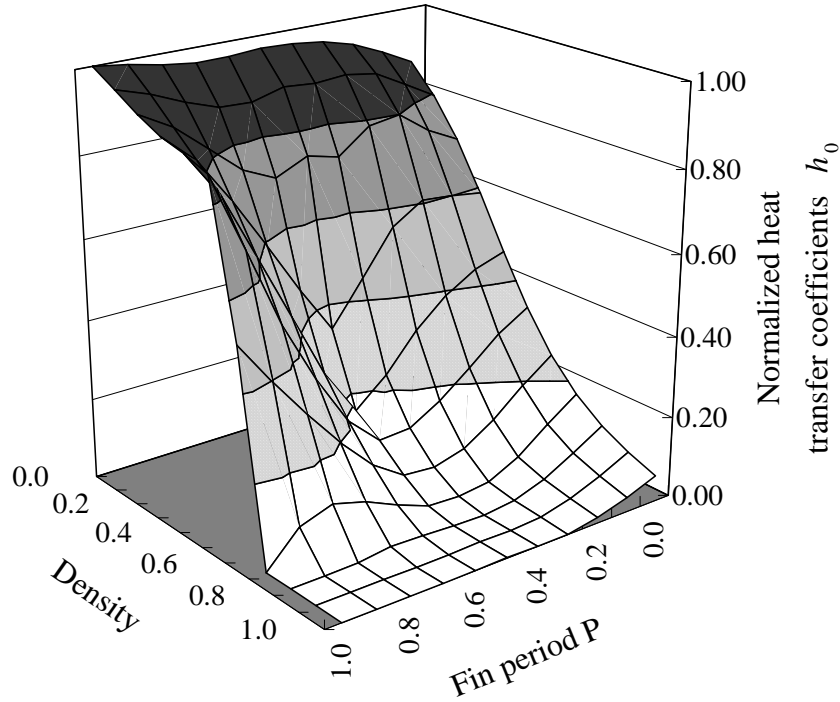


Fig.4.8 Surrogate model with respect to normalized heat transfer coefficients using the Radial Basis Function

#### 4.1.4 最適化アルゴリズム

図 4.9 に最適化問題のアルゴリズムを示す．図に示したように，最初に設計変数  $R$  の初期値をもとに，均質化熱伝導テンソル  $\kappa^H$  を求める．次に，有限要素解析により，釣り合いの方程式を解いて，節点温度ベクトル  $T$  を求める．その値を用いて，目的関数，体積制約の値を求める．目的関数が収束すれば，アルゴリズムを終了し，そうでなければ目的関数，体積制約の設計変数  $R$  に関する感度を求める．得られた感度をもとに，最適化手法を用いて設計変数  $R$  を更新する．

設計変数依存の熱伝達境界条件については，最適化によって逐次得られる密度分布に対して近似 Hat 関数を用いて物体境界を抽出した後，式(4.14)により物体境界上に設定する．なお物体境界を抽出するためには非一様な密度分布が必要なため，固定設計領域内の密度の最大値が近似 Hat 関数における  $\rho_{lower}$  に達するまでは(以後このステップ数を  $N_T$  と記す)，温度固定境界条件を配置し式(4.3)，(4.4)，(4.5)を用いて式(4.6)を解き最適化を実行する．

$N_T+1$  ステップ目以降は、温度固定条件を取り除き、式(4.14)を用いて式(4.6)を解く。

さらに熱伝達係数の形状依存性を考慮する場合は、物体境界を抽出した後、式(4.22)に基づき熱伝達係数を更新し、最初のステップから繰り返す。なお本研究では、最適化手法として、高い収束性は期待できないが、どのような目的関数においても、設計変数が数万以上の大規模な最適化問題を解くことができる逐次線形計画法(SLP)を用いる。

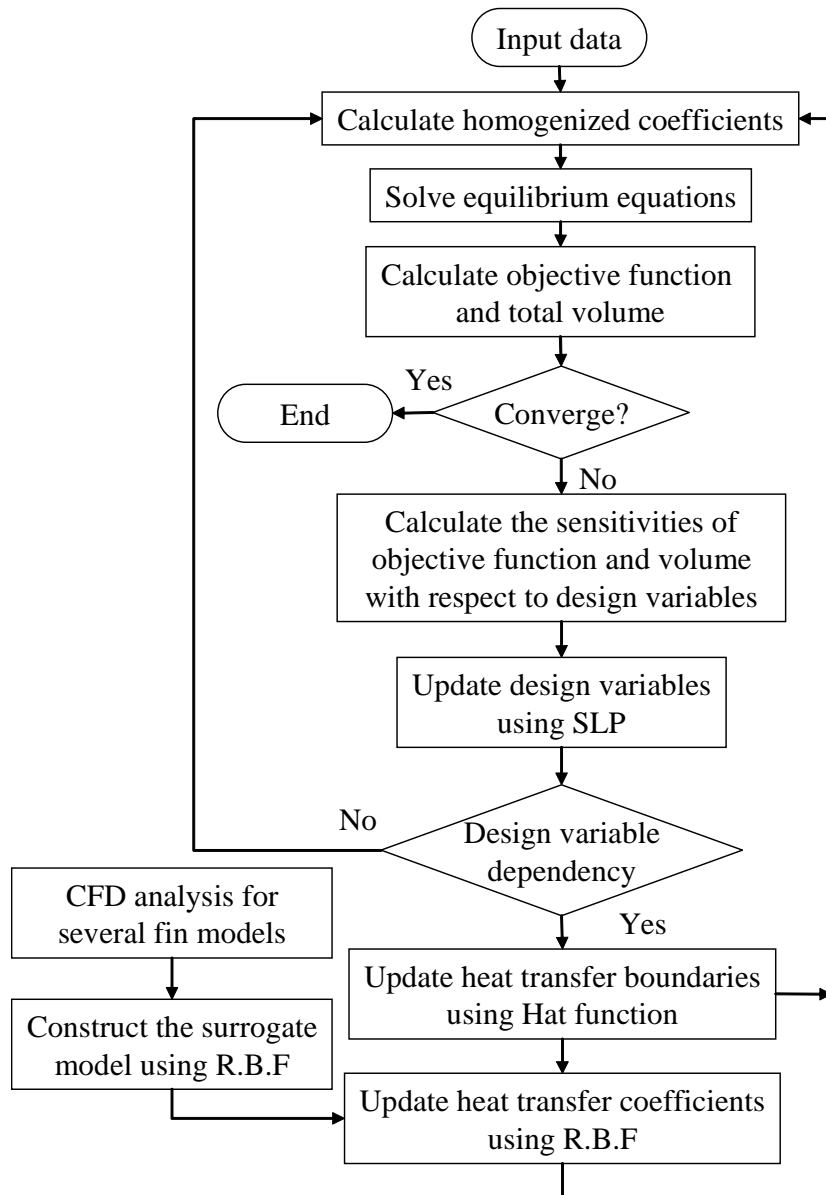


Fig.4.9 Flow chart of optimization method

#### 4.1.5 感度解析

SLP により設計変数を更新する際に必要な目的関数  $F$  の設計変数  $R$  に関する感度を導出する．なお，ここでは，内部発熱だけでなく，熱伝達係数や熱流束も設計変数に依存すると仮定する．熱伝導体の平衡方程式(4.6)をマトリックス表示すると，

$$(K + K_h)T = q + Q + H \quad (4.25)$$

と書ける．ここで， $K$  は熱伝導マトリックス， $K_h$  は熱伝達マトリックス， $q$  は熱流束ベクトル， $Q$  は内部発熱ベクトル， $H$  は熱伝達ベクトルである．このとき目的関数は次式で表される．

$$F = \frac{1}{2}T^T K T + \frac{1}{2}T^T K_h T - T^T (q + Q + H) = -\frac{1}{2}T^T (q + Q + H) \quad (4.26)$$

この両辺を設計変数  $R$  で微分すれば，

$$\frac{\partial F}{\partial R} = -\frac{1}{2} \frac{\partial T^T}{\partial R} (q + Q + H) - \frac{1}{2} T^T \frac{\partial (q + Q + H)}{\partial R} \quad (4.27)$$

この式に対し，式(4.25)を用いれば，

$$\frac{\partial F}{\partial R} = -\frac{1}{2} \frac{\partial T^T}{\partial R} (K + K_h) T - \frac{1}{2} T^T \frac{\partial (q + Q + H)}{\partial R} \quad (4.28)$$

となる．一方式(4.25)の両辺を微分すれば，

$$\frac{\partial (K + K_h)}{\partial R} T + (K + K_h) \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{\partial (q + Q + H)}{\partial R} \quad (4.29)$$

となり，ここで式(4.29)の左から  $T^T$  を掛け， $K$  および  $K_h$  の対称性を利用すれば，以下のよう  
に感度が求まる．

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{1}{2} T^T \frac{\partial (K + K_h)}{\partial R} T - T^T \frac{\partial (q + Q + H)}{\partial R} \quad (4.30)$$

上式の右辺第 2 項が，設計変数依存性を考慮した境界条件に対応した感度となり，設計変数依存性を考慮しない場合は，第 3 章で求めた感度に一致する．

## 4.2 数値例による提案手法の検証

幾つかの熱伝達境界のある 2 次元の熱拡散問題を解くことにより，本章で提案したトポロジー最適化手法の妥当性を検証する．いずれの場合においても，最適化の初期値は  $R_i = 0.9$  に，近似 Hat 関数における  $\rho_{lower}$  および  $\rho_{upper}$  は，0.3，0.9 にそれぞれ設定して，最適化を実施

した

#### 4.2.1 熱伝達係数，熱伝導率の設定と最適構造の関係

図 4.10 に設計領域を示す．本手法による物体境界の抽出には，非一様な密度分布が必要のため，密度の最大値が  $\rho_{lower}$  に達するステップ数  $N_T$  までは，図 4.10(a)に示したように， $5m \times 5m$  の正方形形状の設計領域の境界  $\Gamma_T$  を  $T=0$  に固定し，境界  $\Gamma_q$  に熱流束  $1W/m^2$  を与える．そして  $N_T+1$  ステップ目において，上述の温度固定境界を取り除き，固定設計領域内全域にわたり，熱伝達係数および環境温度として， $h_0 = 0.1W/m^2K$ ， $T_{amb} = 0C^\circ$  を与える．近似 Hat 関数の遷移パラメータは  $\varepsilon = 0.001$  とした．なお，体積制約の上限値  $V_{max}$  は全設計領域の 30% とし，要素分割数は  $200 \times 200$  として最適化を図った．本例題では，物体境界抽出方法の妥当性を検討するため，式(4.22)で示した熱伝達係数の形状依存性は考慮していない．

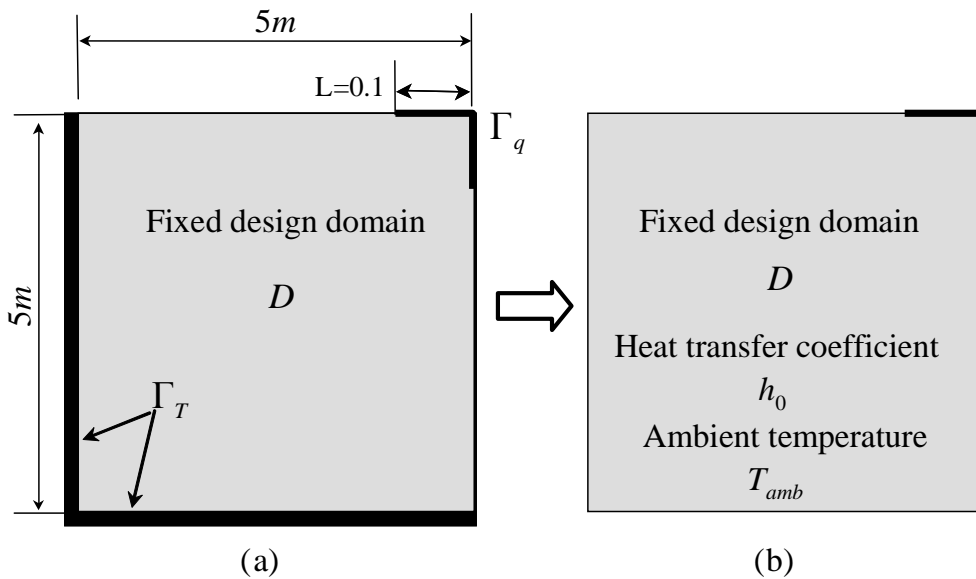
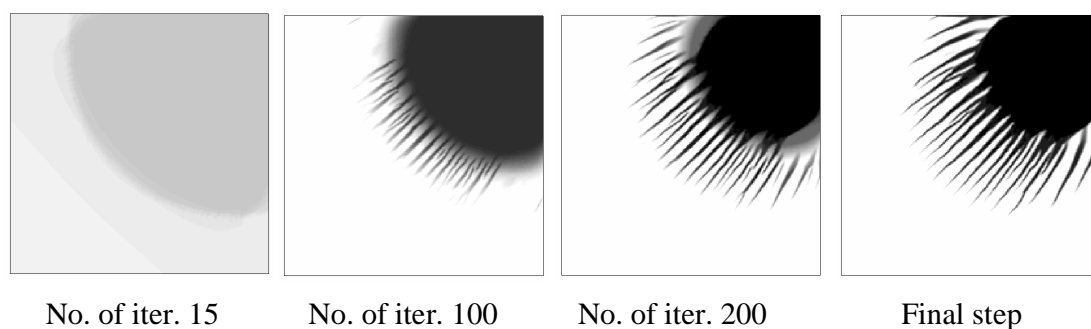


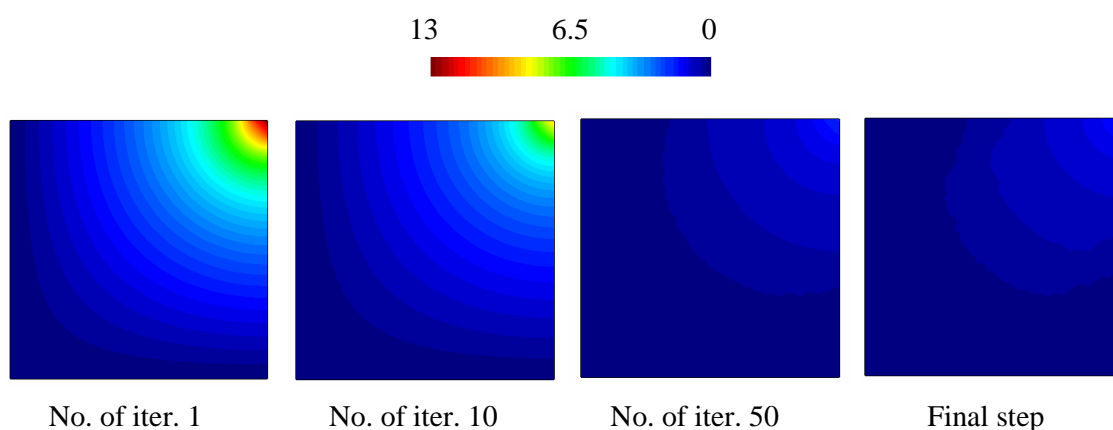
Fig.4.10 Design domain for design problem 1. (a) boundary condition during the first  $N_T$  iteration, (b) boundary condition from  $N_T + 1$  iteration

図 11(1)に本研究で提案した最適化手法によって得られた最適構造と最適化の過程における構造の履歴を示す．なお図の白黒の濃淡は材料の正規化された密度分布を示し，白色が完全孔で，図 3.4 のユニットセルにおける正方形形状の孔の 1 辺  $r$  が 1 に，黒色が完全稠密

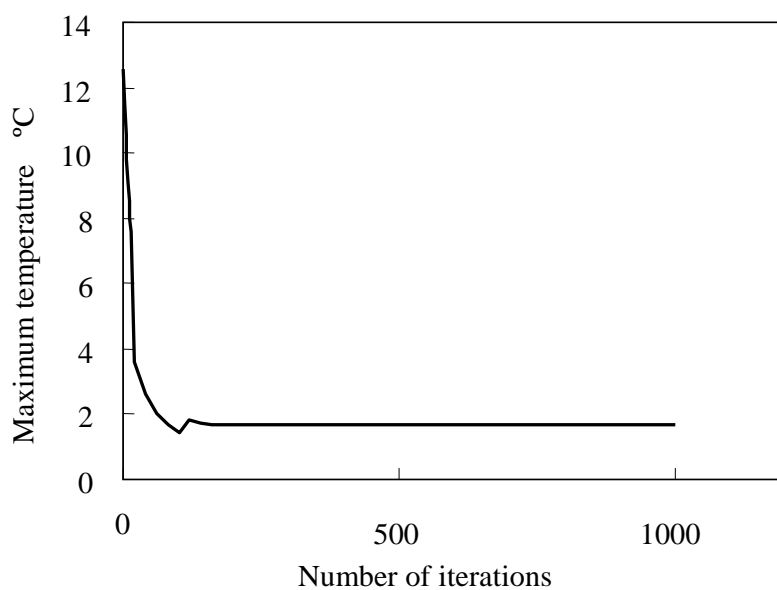
で  $r$  が 0 に相応している．後に示す最適構造も同様の方法にて示す．図に示すように，本手法によって得られた構造において，チェッカーボードは生じておらず，明瞭な最適構造が得られていることが分かる．最適構造は，反復回数を増すに従い，熱流束境界に偏った構造となり，最終的には，物体境界には放熱を促進するフィンが現れる．図 11(2)に，図 11(1)のステップ数に対応した温度分布を，図 11(3)に固定設計領域内で最も高温となる，右上部の温度の最適化による履歴を示す．これらの図に示すように，最適化が進むにつれ，固定設計領域内の温度分布が全体的に低くなり，最高温度も最適化により低減されていることが分かる．



(1) Convergence history for design problem 3



(2) History of temperature distribution for design problem 3



(3) History of temperature at right top point for design problem 3

Fig.4.11 History of optimization for design problem 3

図 4.12 には，本手法によって得られた最適構造，および，近似 Hat 関数によって抽出した物体境界を示す．図に示すように，本研究で提案した方法により，熱伝達境界条件を与えるべき物体境界が抽出されていることが分かる．

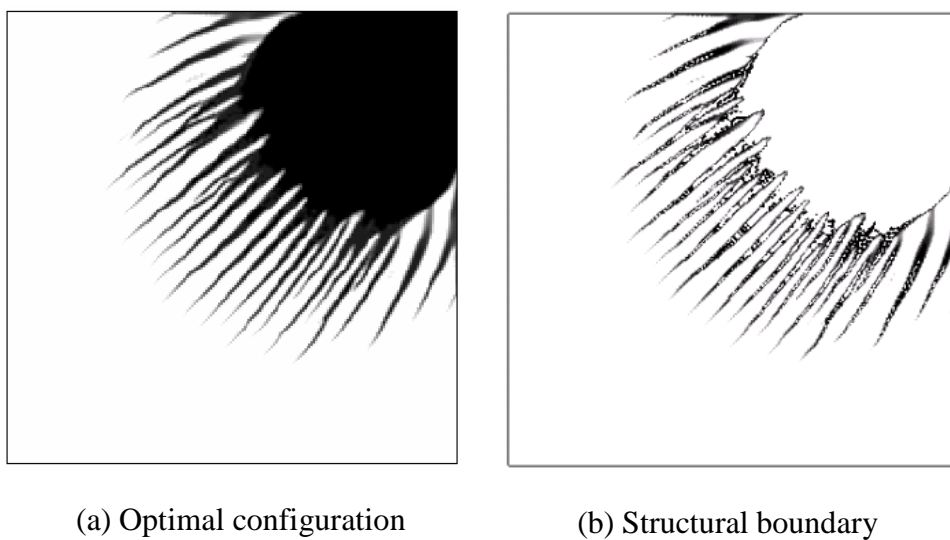


Fig.4.12 Extracted structural boundary for design problem 3

図 4.13 には、近似 Hat 関数の 0 から 1 への遷移幅  $\varepsilon$  を変更して最適構造を求めた結果を示す。図 4.13 (a) , (b) ではそれぞれ、 $\varepsilon = 0.1$  ,  $0.001$  として最適化を行った。図 3.13(a) に示すように遷移幅を大きくとると、遷移幅を小さく設定した図 4.13 (b) の結果に比べ、境界条件を与える物体境界が不明瞭になるため、最適構造も不明瞭になる。以上の結果から、本研究では、上述の問題点を避けるために、以後の数値例において遷移幅として  $\varepsilon = 0.001$  を用いた。

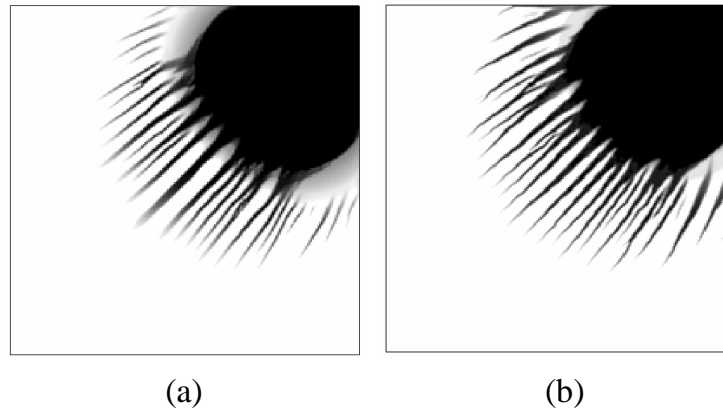
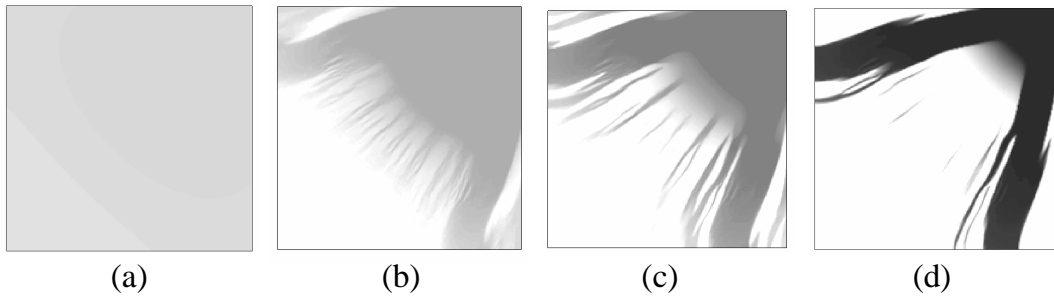
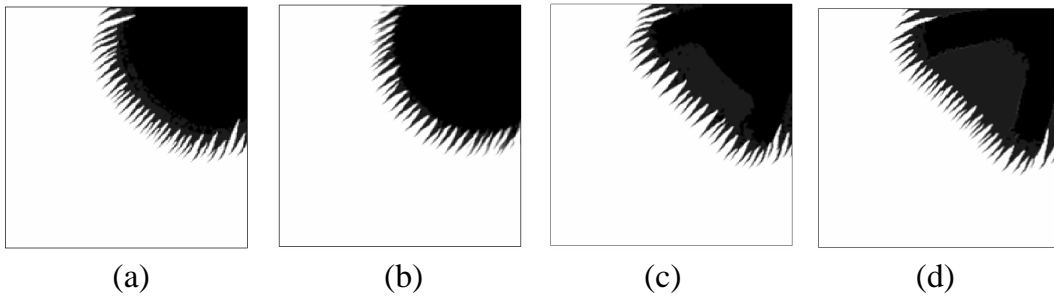


Fig.4.13 Optimal configurations of design problem 3. (a)  $\varepsilon = 0.1$ , (b)  $\varepsilon = 0.001$

なお本章で示した手法では、最適化の途中の  $N_T + 1$  ステップで、温度固定境界を取り除いている。このステップ数が最適構造に与える影響を検討するため、温度境界を取り除くステップ数を (a)  $N_T = 15$ , (b)  $N_T = 30$ , (c)  $N_T = 50$ , (d)  $N_T = 100$  , として最適化を行った。なお、(a)  $N_T = 15$  は本設計例において、固定設計領域内の最高密度が  $\rho_{lower}$  に達したステップ数を示す。図 4.14(1)(a) ~ (d) にはそれぞれのケースにおける、 $N_T$  ステップ時点での密度分布を、さらに得られた最適構造を図 4.14(2) に示す。図 4.14(2) の (c), (d) に示すように、温度固定境界を、ある程度明瞭な構造が出現するステップ数まで維持し続けると、得られる最適構造は、温度境界を取り除いた時点での構造の影響を強く受ける。本手法では、 $\rho_{lower} \leq \rho_e \leq \rho_{upper}$  の密度を持つ要素が近似 Hat 関数によって物体境界として見なされているので、固定設計領域の密度の最大値が  $\rho_{lower}$  を超えれば、熱伝達境界条件を与える構造境界を抽出できる。そこで本研究では、更新された要素密度の最大値が  $\rho_{lower}$  を越えた次のステップ数において、温度固定境界を取り除く所作を行う。



(1) Density distributions when imposed temperature boundary conditions are removed. (a)  $N_T=15$ , (b)  $N_T=30$ , (c)  $N_T=50$ , (d)  $N_T=100$



(2) Optimal configurations corresponding to the iteration number when the imposed temperature boundary condition is removed. (a)  $N_T=15$ , (b)  $N_T=30$ , (c)  $N_T=50$ , (d)  $N_T=100$

Fig.4.14 Relationship between optimal configurations and number of iteration when the imposed temperature boundary condition is removed

図 4.15 には，熱伝達係数の値が最適構造に与える影響を検討するため，熱伝達係数を(a)  $h_0=0.01\text{W/m}^2\text{K}$ , (b)  $h_0=0.1\text{W/m}^2\text{K}$ , (c)  $h_0=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ , (d)  $h_0=10.0\text{W/m}^2\text{K}$  として最適構造を求めた結果を示す．図に示すように，熱伝達係数を小さく設定するに従い，最適構造として，固定設計領域全域にわたりフィンが現れる．



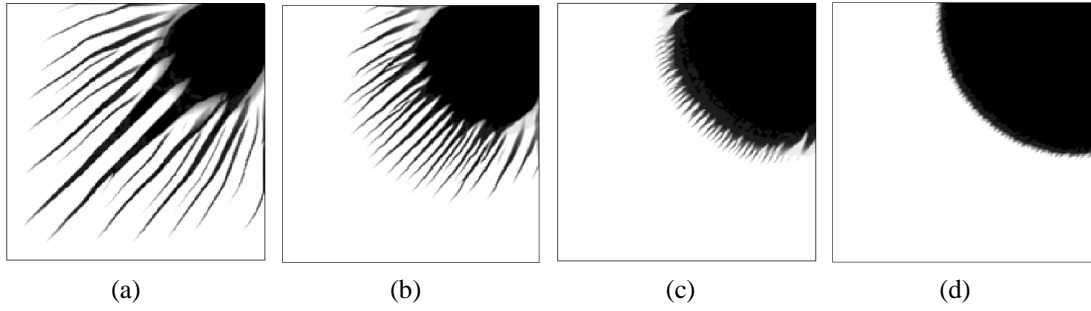


Fig.4.15 Influence of heat transfer coefficients and thermal conductivities on optimal configurations.  
 (a)  $h_0=0.01\text{W/m}^2\text{K}$ , (b)  $h_0=0.1\text{W/m}^2\text{K}$ , (c)  $h_0=1\text{W/m}^2\text{K}$  and (d)  $h_0=10\text{W/m}^2\text{K}$

この結果の妥当性を検討するために，図 4.16 に示す熱伝達のある定常 1 次元熱伝導問題を考える．構造物を通過する熱量を  $Q$ ，高温流体側の熱伝達係数と環境温度を  $h_1, t_{f1}$ ，低温流体側の熱伝達係数と環境温度をそれぞれ  $h_2, t_{f2}$ ，伝熱面積を  $S$  とすると，構造物を通過する熱量は次式で与えられる．

$$Q = K(t_{f1} - t_{f2})S \quad (4.31)$$

$K$  は式(4.32)で表される熱通過率を示す．

$$K = \frac{1}{1/h_1 + l/\lambda + 1/h_2} \quad (4.32)$$

ここで， $l$  は構造物の長さ， $\lambda$  は熱伝導率を示す．

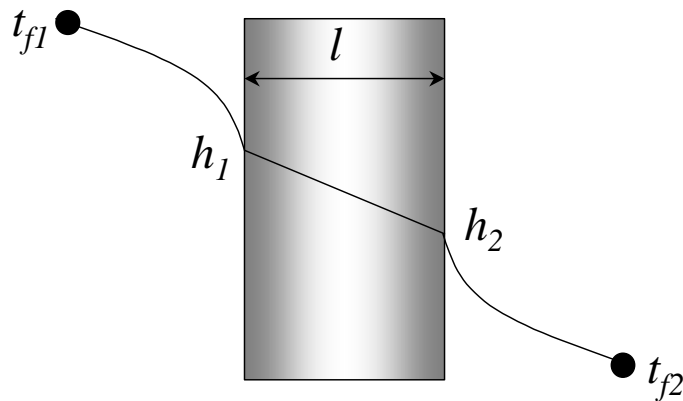


Fig.4.16 Schematic view of steady state heat transfer phenomenon with heat convections

つまり伝熱量の増加には、伝熱面積  $S$  の拡大と、熱通過率の増加が必要である。基本的には伝熱面積  $S$  の拡大が放熱量の増加に有効なので、図 4.15(a)に示すように最適構造として、固定設計領域全域にわたり多くのフィンが現れる。しかし、十分大きな熱伝達係数を設定すると、 $K$  に対する  $l/\lambda$  の寄与を小さくする必要があるので、図 4.15 (c),(d)に示すように、熱源からの距離を最小化しつつ伝熱面積を増やすために、より微細なフィンを有した構造となる。

次に、熱伝達係数と熱伝導率の値の関係が最適構造に与える影響について検討してみる。式(4.32)に示すように、熱通過率は熱伝導率と熱伝達係数の関係によって決まるので、熱伝達係数と熱伝導率との比が同じ場合、同一の最適構造が得られることになる。ここでは、本手法においても同一の最適構造が得られるかを調べてみた。図 4.17 に最適構造の比較を示す。これより、本手法においても、同様の結果が得られており、手法の妥当性が検証できたと考える。

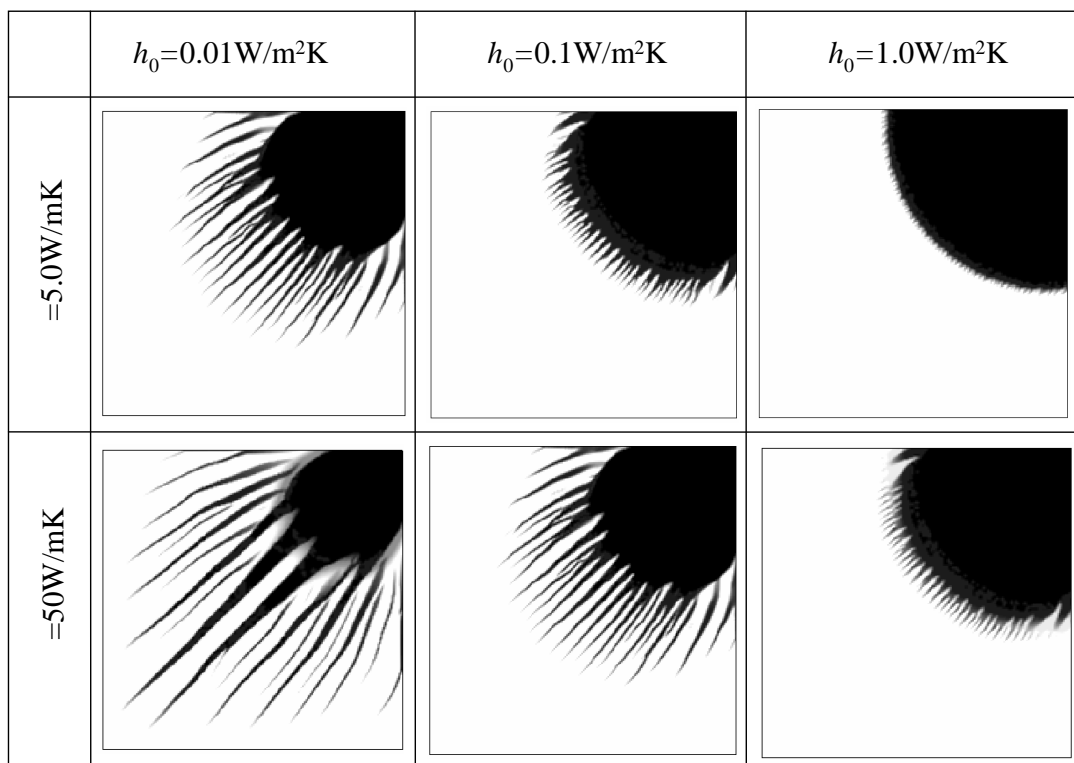


Fig.4.17 Relationship between thermal conductivity and heat transfer coefficient shown in optimal configurations

### 4.2.2 ヒートパイプ設計

図 4.18 に設計領域を示す．図に示したように， $10\text{m} \times 10\text{m}$  の正方形形状のうち， $5\text{m} \times 5\text{m}$  の  $1/4$  モデルとして解析を行う．設計領域の境界  $\Gamma_q$  に熱流束  $1\text{W}/\text{m}^2$  を与え， $P_T$  に温度固定境界として， $T=0$  に固定する．そして  $N_T+1$  ステップ目において，上述の温度固定境界を取り除き，固定設計領域内全域にわたり，熱伝達係数および環境温度として， $h_0 = 0.1\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ， $T_{amb} = 0$  を与える．なお，体積制約の上限値  $V_{\max}$  は全設計領域の 30% とし，要素分割数は  $200 \times 200$  として最適化を図った．

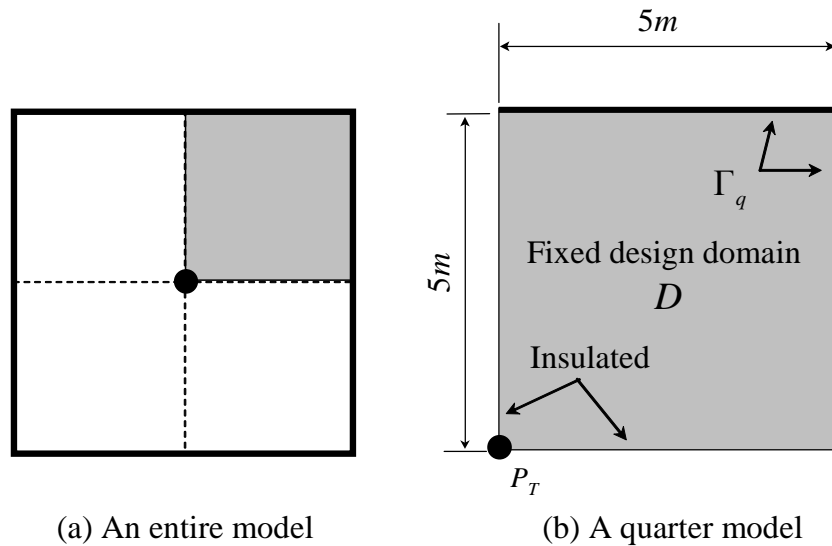


Fig.4.18 Design domain for design problem 4

図 4.19 に得られた最適構造を示す．図に示すように，熱伝達係数の値を大きくするに従い，最適構造として，細かなフィンが現れることがわかる．また熱伝達係数が非常に大きい場合は，最適構造として，フィンの無い薄板形状となる．

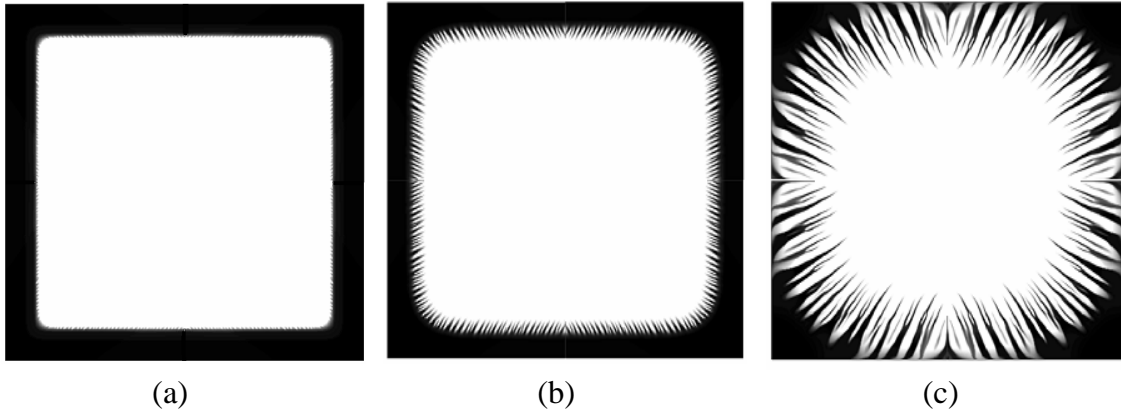


Fig.4.19 Optimal configurations of design problem 4. (a)  $h_0=10.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb}=0\text{ }^\circ\text{C}$ , (b)  $h_0=1.0\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb}=0\text{ }^\circ\text{C}$ , (c)  $h_0=0.1\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_{amb}=0\text{ }^\circ\text{C}$

この結果を解釈するために、次式に示すBiotの式を用いる．式(4.33)に示すように、低い熱伝達係数を設定した場合は、ピオ数も小さくなる．この場合、構造表面からの熱伝達を促進するために、 $l$ を大きくする必要がある．したがって、図4.19(b), (c)に示すように、細かなフィン構造が現れる．それに対して高い熱伝達係数を設定すると、熱伝導率を高く設定することが有効であるが、実際には $l$ を小さくすることで、熱伝達を促進することになる．そのため、図4.19(a)に示すように、フィンの無い形状が得られることが分かる．

$$Bi = \frac{hl}{\lambda_{material}} \quad (4.33)$$

#### 4.2.3 熱伝達係数の形状依存性を考慮した最適構造

図 4.20 に熱伝達係数の形状依存性を考慮した場合の最適化の履歴と最終的に得られた最適構造を示す．なお最適化は、図 4.15(b)で示した最適構造を初期状態とし、次のステップから式(4.22)に基づいて熱伝達係数を更新し最適化を実行する．図 4.20 に示すように、密度の高いフィンの谷部では、熱伝達係数が小さくなる．この場合、熱拡散を大きくするためには、表面積の拡大が有利であるため、ステップ数の増加に伴い、フィンの谷部近傍の非構造部分が徐々に構造に変化する．一方、フィン先端部は熱伝達係数が上昇する．この場合、構造物の熱伝導を利用した方が熱拡散最大化に有効なため、最適化が進むにつれてフィンは次第に小さくなり、最終的にはフィン形状がほとんど無い形状となる．このように、

熱伝達係数の形状依存性を考慮することにより，求めるべき最適構造も変化する．したがって，熱伝達条件を含む熱拡散最適化問題に対しては，熱伝達係数の形状依存性を考慮する必要があると考える．

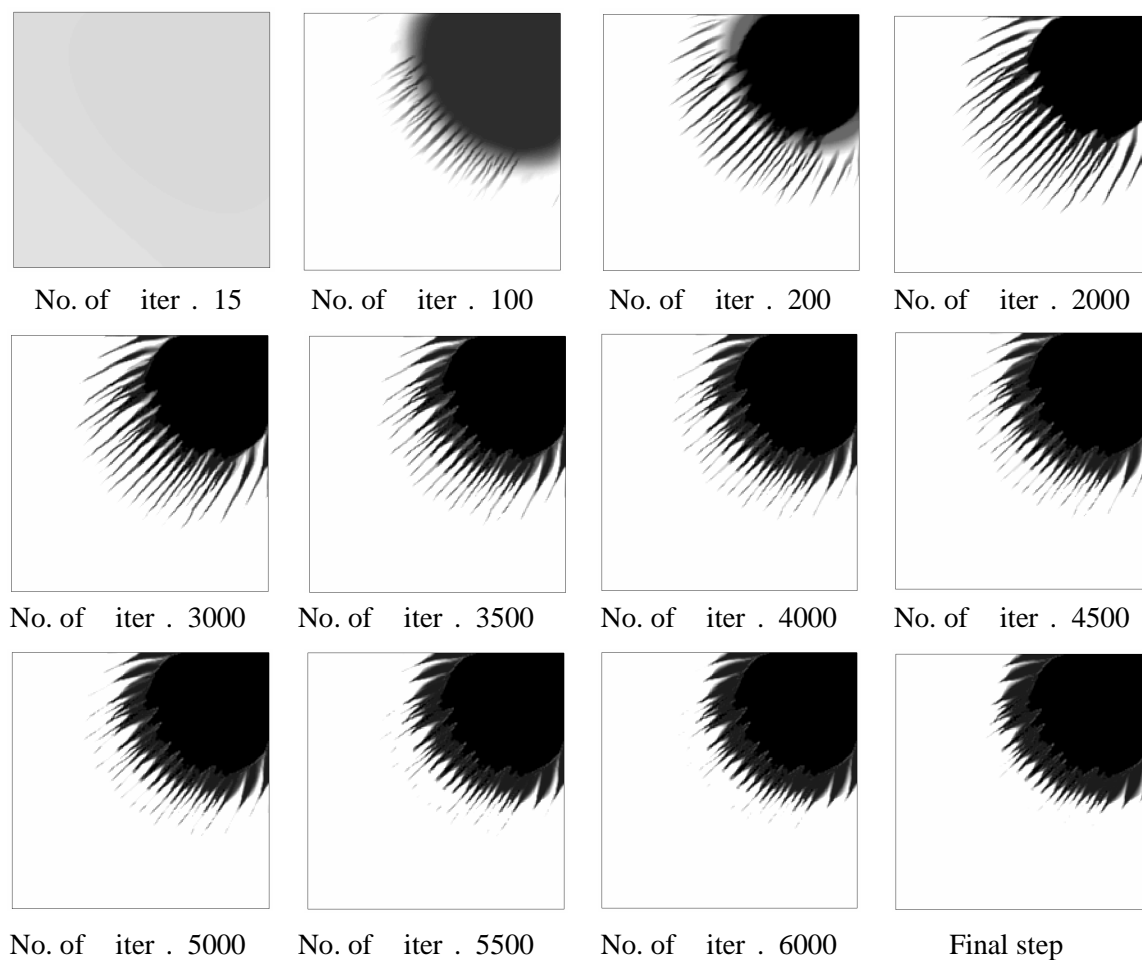


Fig.4.20 History of optimization of design problem 3, considering shape dependencies with respect to heat transfer coefficients

### 4.3 まとめ

本章では，物体境界上に熱伝達境界のある線形熱伝導体の最適設計手法を提案するとともに，簡単な最適設計問題により，本章で提案する方法の妥当性を検証した．結果を以下に示す．

- (1) 物体境界上に熱伝達境界条件のある構造物の熱拡散問題に対して，均質化法に基づく新しいトポロジー最適化問題を定式化した．
- (2) 近似 Hat 関数を用いて，固定設計領域内の物体境界の抽出方法を構築するとともに，物体境界への熱伝達境界条件の設定方法を構築した．さらに，より現実的な境界条件設定において最適構造を得ることを目指して，上記の構造物表面上に設定する熱伝達境界条件に対し，代理モデルと物体表面形状の情報に基づき熱伝達係数を更新する，形状依存性を考慮した熱伝達係数設定手法を提案した．
- (3) 上記の定式化に基づき，均質化法と逐次線形計画法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築した．
- (4) 熱伝達境界条件における熱伝達係数や熱伝導率の値が，最適構造に与える影響を検討した．また，熱伝達係数の形状依存性を考慮することにより，考慮しない場合と異なる最適形状が得られることを示した．



## 第 5 章

### 熱・構造連成問題に対するトポロジー最適化

本章では，レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化手法に基づき，熱拡散と剛性の両方の向上を目的とした二目的構造最適化手法を構築する．

第 3 章および第 4 章では，構造物の温度低減を目的とした熱拡散問題に対する新しいトポロジー最適化手法を提案したが，実際のシリンダヘッドなど，熱の影響を受ける機械部品に対しては，温度低減に加え，熱による変形や応力に対する設計検討が不可欠である．しかし，従来までに提案されているトポロジー最適化手法は，熱拡散，剛性もしくは振動特性などの単一の現象のみを取り扱っており，温度低減と剛性向上を同時に考慮する必要があるような設計問題に関する研究事例は少ない [55]．

他方，近年新しい構造最適化の方法として，レベルセット法に基づいた方法論 [41] [42] が提案されている．この方法は，スカラー場であるレベルセット関数場の等位面を用いて，物体の外形形状を陰的に表現し，レベルセット関数を更新させることにより，最適化過程における，形状の更新を表現する方法である．Xia と Wangha [43] は，レベルセット法による形状表現を用いて，熱の影響を考慮した剛性最大化を目的とした最適化手法を提案している．しかし，従来までに提案されているレベルセット法に基づく構造最適化 [41] [42] と同様に，レベルセット関数の更新をハミルトンヤコビ方程式に帰着して行うため，設計領域に穴が創出されるような形態変更が許容されない．さらに，物体境界における熱伝達条件についての検討も行われておらず，加熱や冷却条件といった実際の熱の授受を考慮した構造最適化はできないと言う問題点を持つ．

これに対して Yamada ら [44] は，構造の形態変更を可能とする方法として，レベルセット関数の更新を反応拡散方程式に帰着して行う新しいトポロジー最適化の方法を提案している．この方法では，目的汎関数にレベルセット関数の勾配項を付与することにより，最適化の過程において，設計領域内に仮想的な界面エネルギーを与え，その大きさを設定することにより，最適構造の複雑度を陰的に設定可能な特長をもち，過度に複雑な構造が除かれた工学的に有効な最適構造を創成することができる．さらにレベルセット法による形状表現を用いると，陰的ではあるが明確な境界が存在するため，設計境界上に熱伝達などの



物理的な境界条件を課すことが可能になる．

そこで本章では，以上のような熱現象を考慮すべき構造最適化に関する問題を解決するために，構造物の最適設計問題に対して，熱拡散と剛性の同時向上を目的とする，物体境界の熱伝達条件を考慮可能な，レベルセット法に基づく新しいトポロジー最適化の方法論を構築する．そして簡単な数値例により，本章で提案する方法論の妥当性を検証する．

## 5.1 最適化問題の定式化

ここでは，レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化の定式化について説明した後，重み付け総和法に基づき，熱・構造問題に対する目的関数を定式化する．そして，この目的関数を用いて最適化問題を定式化するとともに，有限要素法を用いた最適化アルゴリズムを構築する．

### 5.1.1 レベルセット法

レベルセット法 [56] [57] [58] は，流体解析における自由境界問題の数値解析手法として発展し，2 相流解析，炎の伝播解析などに応用されてきたが，近年では流体解析のみにとどまらず，幾何学問題，画像処理などさまざまな分野に応用範囲が広がっている．流体の自由境界問題の数値解法においては，トポロジーの変化や 2 次元境界面の扱いが難しい．レベルセット法は，境界面およびその運動を 1 次元高位のレベルセット関数で表現することで，境界面の分離や結合を容易に扱うことができる特徴を持つ．

レベルセット法は，初期の論文においては PSP (Propagation of Surface under Curvature) と呼ばれ，平均局率流などの幾何学的問題に適用された．そのため，レベルセット法を図形の陰的表現や変形の問題に応用する研究が盛んに行われている．

### 5.1.2 レベルセット法に基づくトポロジー最適化

ここでは，レベルセット法に基づく形状表現を用いたトポロジー最適化手法について述べる．物体により占められている領域  $\Omega_d$  (以下，物体領域) と，物体により占められていない領域 (以下，空洞領域) により構成される固定領域  $D$  (以下，固定設計領域) において，物体領域の構造を最適化する場合について考える．ここで，レベルセット法を用いて固定

設計領域  $D$  内の物体領域  $\Omega_d$  の境界  $\partial\Omega_d$  を表現する．すなわち，レベルセット関数を  $\phi$  として，次式に示すように，物体領域  $\Omega_d$  の境界  $\partial\Omega_d$  を，レベルセット関数のゼロ等位面によって陰的に表現する．

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega_d \setminus \partial\Omega_d \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_d \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (5.1)$$

なお，上式において，レベルセット関数の上限値と下限値をそれぞれ，1と-1に設定しているが，これは後述の目的汎関数に付加する界面エネルギーをレベルセット関数により表現するために必要とする．なお，物体領域内部において，レベルセット関数が正の実数値であれば，任意の値に対して，同じ形状を表現することになるので，この制約を設けても，形状表現には問題ない．これにより，レベルセット関数には通常設定される符号付き距離関数の性質を持たず，図5.1に示すように，空洞領域では-1，物体領域では1をとり，境界近傍において滑らかに分布するスカラー関数となる．

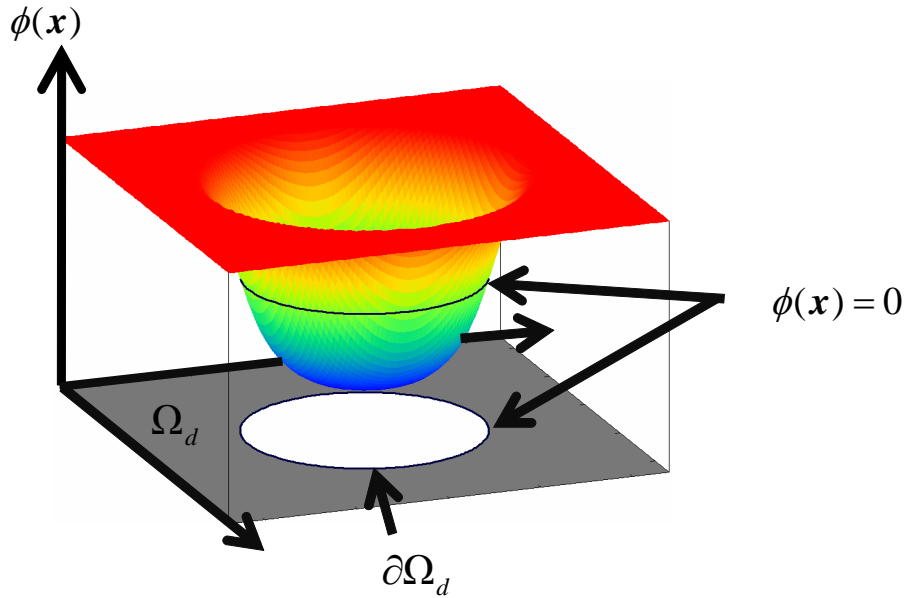


Fig. 5.1 Fixed design domain  $D$  and level set function  $\phi$

上述のレベルセット法による形状表現を用いて，目的汎関数を  $F$ ，体積制約に対する制約汎関数を  $G$  で表現する構造最適化問題を次式で定義する．

$$\inf_{\phi} F(\Omega_d(\phi)) = \int_{\Omega_d} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (5.2)$$

$$\text{subject to } G(\Omega_d(\phi)) = \int_{\Omega_d} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (5.3)$$

ここで、 $V_{\max}$  は許容される体積の上限値である。上式の構造最適化問題においては、レベルセット関数  $\phi$  は、連続性を持つ必要がないことは自明である。その結果、レベルセット関数は、到る所で不連続な値を持つ可能性があるため、到る所で不連続性を持つ最適設計解を許容する。均質化法に基づくトポロジー最適化 [11] においては、最適設計問題を材料分布問題に置き換え設計空間の緩和を行うが、レベルセット法による形状表現を行う場合は、グレイスケールを許容しないため、材料分布問題に置き換えることによる設計空間の緩和を行うことができない。

そこで本研究では、フェーズフィールド法の界面エネルギー表現を用いて、最適化問題の目的汎関数を、界面エネルギーと式(5.2)で示す目的汎関数の和として定式化し、最適化問題を以下のように定義する [44]。

$$\inf_{\phi} F(\Omega_d(\phi), \phi) = \int_{\Omega_d} f(\mathbf{x}) d\Omega + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \quad (5.4)$$

$$\text{subject to } G(\Omega_d(\phi)) = \int_{\Omega_d} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (5.5)$$

ここで、 $\tau$  は複雑度係数と呼ばれる、仮想的な界面エネルギーの大きさを与えるパラメータである。この仮想的な界面エネルギーは、設計空間を緩和するだけでなく、大きさを設定することにより、最適構造の複雑度を陰的に設定可能としているため、工学的に有効な最適設計解を創成することを可能としている。なお、上式の第二項が界面エネルギーを表現するようにするためには、レベルセット関数  $\phi$  に、フェーズフィールド法のフェーズフィールド変数と同様な性質を持たせる必要があるため、式(5.1)においてレベルセット関数の上限値と下限値を設定している。

次に、上式の構造最適化問題を、ラグランジュ未定乗数法を用いて、無制約問題に置き換える。すなわち、ラグランジュアンを  $\bar{F}$ 、式(5.5)に関するラグランジュ乗数を  $\lambda_m$  とすれば、上述の最適化問題は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \inf_{\phi} \quad \bar{F}(\Omega_d(\phi), \phi) &= \int_{\Omega_d} f(\mathbf{x}) d\Omega + \lambda_m \left( \int_{\Omega_d} d\Omega - V_{\max} \right) + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_d} \bar{f}(\mathbf{x}) d\Omega - \lambda_m V_{\max} + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

なお上式では、ラグランジュアの密度関数  $\bar{f}(\mathbf{x})$  として、 $\bar{f}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\lambda_m$  としている。本章では、上式を解くことにより、最適構造を得る。

### 5.1.3 時間発展問題

従来までに提案されているレベルセット法に基づく構造最適化手法では、式(5.2)と式(5.3)で示す構造最適化問題を解くために、最適化問題を次式で示すレベルセット関数  $\phi$  に関する、Hamilton-Jacobi 方程式を解く問題に帰着させている。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_N |\nabla \phi| = 0 \tag{5.7}$$

ここで、 $V_N$  は物体境界の移流速度の法線線分であり、最適化問題の定式化より得られる外形形状感度を与える。上式に帰着した最適化においては、通常は物体境界の更新により最適構造を得ることになり、この方法は、基本的には形状最適化と同様の方法であるといえる。したがって、構造最適化の過程において、物体領域に空洞領域が創出されるような形態変化が許容されていないという問題点がある。この問題を解決するために、恣意的に物体領域に穴を創出させる方法が提案されているが、得られる最適構造は、パラメータの設定に大きく依存し、安定的に最適解を得ることは難しい [59]。さらに、式(5.7)は基本的には移流方程式の性質を持ち、その数値解法として幾つかの方法 [41] [58] が提案されているが、安定的に解を得ることは難しい。特に熱・構造などの連成問題においては、数値的に不安定な現象を生じ、解の収束性が悪いことも報告されている [60] [61]。

そこで本章では、上述の問題を解決する方法として、界面拡散に基づいて界面の移動を表現する、フェーズフィールド法の考えに着目し、レベルセット関数に関する時間発展方程式を導出する [44]。

まず、上式の最適化問題に関する KKT 条件を導けば、次式となる。

$$\delta \bar{F}(\Omega_d)=0, \quad \lambda_m G(\Omega_d)=0, \quad \lambda_m \geq 0, \quad G(\Omega_d) \leq 0 \tag{5.8}$$

このKKT条件を満たすレベルセット関数  $\phi$  が最適解の候補となる。しかしながら、これら

を満たすレベルセット関数を直接求めることは困難であるため、適当な初期値を与え、設計変数であるレベルセット関数を更新していくことにより、最適解を導く。すなわち、仮想的な時間 $t$ を導入し、レベルセット関数を変動させる駆動力は、ラグランジュアン $\bar{F}$ の勾配に比例するものと仮定すれば、次式に示すように、最適化問題をレベルセット関数 $\phi$ の時間発展問題に置き換えることができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \frac{\delta \bar{F}}{\delta \phi} \quad (5.9)$$

ここで、 $K(\phi) > 0$ は比例定数、 $\delta \bar{F} / \delta \phi$ はラグランジュアン $\bar{F}$ の汎関数微分を表す。上式に式(5.6)を代入すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \left( \bar{f}(\mathbf{x}) \frac{\delta \Omega_d}{\delta \phi} H(\phi) - \tau \nabla^2 \phi \right) \quad (5.10)$$

ここで、 $H(\phi)$ はヘビサイド関数を表す。また形状 $\Omega_d(\phi)$ に対するレベルセット関数 $\phi$ の感度 $\delta \Omega / \delta \phi$ は、物体領域 $\Omega_d$ においてレベルセット関数 $\phi$ が一定であるようにすれば、定数 $C$ としてよいので、上式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \left( C \bar{f}(\mathbf{x}) H(\phi) - \tau \nabla^2 \phi \right) \quad (5.11)$$

となる。このとき、時間発展方程式は次式となる [61]。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) (C \bar{f}(\mathbf{x}) H(\phi) - \tau \nabla^2 \phi) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \quad (5.12)$$

ここで、 $\partial D_N$ は非設計境界である。なお、式(5.12)は反応拡散方程式と呼ばれる偏微分方程式であり、拡散項が含まれることになり、レベルセット関数 $\phi$ の滑らかさが保証されていることを注記しておく。

なお、式(5.5)の制約条件が活性であるとき、

$$\frac{dG(\phi)}{dt} = \int_{\Omega_d} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega = 0 \quad (5.13)$$

となる。したがって、式(5.6)、式(5.11)、式(5.13)より、ラグランジュ乗数 $\lambda_m$ は次式で与えられる。

$$\lambda_m = - \frac{\int_{\Omega_d} K(\phi) (f(\mathbf{x}) + \tau \nabla^2 \phi) d\Omega}{\int_{\Omega_d} K(\phi) d\Omega} \quad (5.14)$$

また，制約条件が非活性であるときは，ラグランジュ乗数  $\lambda_m$  は，次式となる．

$$\lambda_m = 0 \quad (5.15)$$

以上より，ラグランジュ乗数  $\lambda_m$  の値を求め，式(5.12)に基づいてレベルセット関数  $\phi$  を初期値から更新させ，ラグランジュアン  $\bar{F}$  が収束したときのレベルセット関数  $\phi$  が最適構造の候補を与える．

#### 5.1.4 熱拡散および剛性最大化問題の定式化

線形熱弾性体で構成される物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域  $D$  に対して，境界  $\Gamma_t$  において温度  $T_0$  で温度規定，境界  $\Gamma_q$  において熱流束  $q$  の熱流束境界，境界  $\Gamma_h$  において熱伝達係数  $h$  の熱伝達境界が与えられ，さらに境界  $\Gamma_u$  において変位  $u_0$  で変位固定，境界  $\Gamma_f$  で，荷重  $t$  が与えられている問題について考える．但し，境界  $\Gamma_t$ ， $\Gamma_q$ ， $\Gamma_u$  および  $\Gamma_f$  は，固定設計領域の境界  $\partial D$  上に設定しているものとする．また，境界  $\Gamma_h$  は固定設計領域内部において，物体領域の境界上で設定され，レベルセット関数の値に依存して決定される設計変数依存性の境界条件となる．このとき，熱拡散最大化と剛性最大化に対する二目的最適化問題の目的関数を，重み付き総和法により，次式に示す剛性問題と熱拡散問題に対する各々の全ポテンシャルエネルギーの和として定式化する．

$$\inf_{\phi} F(\Omega_d(\phi), \phi) = -w \left( \frac{1}{2} a_t(T, T) - L_t(T) \right) - (1-w) \left( \frac{1}{2} a_u(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L_u(\mathbf{u}) \right) \quad (5.16)$$

$$\text{subject to } a_t(T, \tilde{T}) = L_t(\tilde{T}) \quad \text{for } \tilde{T} \in U_t \quad (5.17)$$

$$a_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L_u(\mathbf{v}) \quad \text{for } \mathbf{v} \in U_u \quad (5.18)$$

$$G(\Omega_d(\phi)) \leq 0 \quad (5.19)$$

なお， $w(0 \leq w \leq 1)$  は熱拡散最大化と剛性最大化のどちらを優先させるかを決定する重み付け係数である．また，上式中の各表記は次式で定義される．

$$a_t(T, \tilde{T}) = \int_{\Omega_d(\phi)} \nabla T \kappa \nabla \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T \tilde{T} d\Gamma \quad (5.20)$$

$$L_t(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_h(\phi)} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \quad (5.21)$$

$$a_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_d(\phi)} \sigma(\mathbf{u}(T)) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega \quad (5.22)$$

$$L_u(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_f} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (5.23)$$

$$G(\Omega(\phi)) = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \quad (5.24)$$

ここで、 $\kappa$  は熱伝導テンソル、 $T_{amb}$  は周囲温度、 $\sigma$  は構造物の変形により生じるコーシー応力を示す。なお本研究では、この設計領域は均質な等方線形弾性体で構成され、かつ熱弾性体の応力 - ひずみの関係には、次式が成り立つと仮定する。

$$\sigma_t = \sigma + \mathbf{E} : \delta \alpha \Delta T \quad (5.25)$$

$\sigma_t$  は熱応力を含んだ応力テンソル、 $\mathbf{E}$  は弾性テンソル、 $\delta$  はクロネッカーのデルタ、 $\alpha$  は熱膨張係数、 $\Delta T$  は温度差を表し、 $U_t$  および  $U_u$  は、以下の式にて定義される関数空間である。

$$U_t = \left\{ \tilde{T} \in H^1(D) \text{ with } \tilde{T} = T_0 \text{ on } \Gamma_t \right\} \quad (5.26)$$

$$U_u = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(D) \text{ with } \mathbf{v} = \mathbf{u}_0 \text{ on } \Gamma_u \right\} \quad (5.27)$$

### 5.1.5 オイラー座標系に基づく変位場の近似解法

本研究では、オイラー座標に基づきレベルセット関数を更新するために、空洞領域を十分に小さな縦弾性係数を持つ物体とみなし、境界近傍では、縦弾性係数が空間的に滑らかに変化するものとして近似することにより表現する。すなわち、平衡方程式(5.18)を次式に置き換えることにより、物体形状を陽に抽出することなく変位場の解析を行う。

$$\int_D \sigma(\mathbf{u}(T)) : \varepsilon(\mathbf{v}) H(\phi) d\Omega = \int_{\Gamma_f} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (5.28)$$

ここで  $\varepsilon$  は、ひずみテンソルを表す。また、体積制約関数  $G(\Omega_d)$  に関しても、次式に示す近似式を用いて求める。

$$G(\Omega_d(\phi)) = \int_D H(\phi) d\Omega - V_{\max} \quad (5.29)$$

ここで  $H(\phi)$  は、次式に示すように、空洞領域で正の微小値  $d > 0$ ，物体領域で 1 を取り、境界近傍の幅  $l$  の区間において連続的に分布する、近似されたヘビサイド関数である．

$$H(\phi) = \begin{cases} d & (\phi < -l) \\ \left( \frac{1}{2} + \frac{\phi}{l} \left( \frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{l^2} \left( \frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{\phi^2}{l^2} \right) \right) \right) (1-d) + d & (-l < \phi < l) \\ 1 & (l < \phi) \end{cases} \quad (5.30)$$

### 5.1.6 レベルセット法に基づく温度場における熱伝達境界条件の取り扱い

温度場についても、空洞領域を十分に小さな熱伝導率を持つ物体とみなして、オイラー座標系に基づいて解析を行う．さらに、固定設計領域  $D$  の内部に、熱伝達境界を与える場合には、レベルセット関数の分布に基づいて境界条件を与える方法 [56] を用いる．この方法の基本的な考え方は、次式に示すように、ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  を用いて、物体境界に沿った境界積分を固定設計領域における領域積分への置き換えである．

$$\int_{\partial\Omega_d} \xi(x) d\Gamma \rightarrow \int_D \xi(x) \delta(x) d\Omega \quad (5.31)$$

さらに、ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  は、レベルセット関数  $\phi$  を用いて次式で表現することができる．

$$\delta(x) = \nabla H(\phi(x)) \cdot N \quad (5.32)$$

ここで  $N$  は、ヘビサイド関数  $H(\phi(x))$  に対する法線ベクトルである．上式の関係を用いることにより、ディラックのデルタ関数を多次元変数から、単次元変数へ置き換えることが可能となる．すなわち、ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  は、次式で与えられる．

$$\delta(x) = \frac{dH(\phi(x))}{d\phi} \nabla \phi(x) \cdot \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)|} = \frac{dH(\phi(x))}{d\phi} |\nabla \phi(x)| \quad (5.33)$$

これにより、式(5.31)に示す境界積分から領域積分への変換は、次式で与えることができる．

$$\int_{\partial\Omega} \xi(x) d\Gamma \rightarrow \int_D \xi(x) \frac{dH(\phi(x))}{d\phi} |\nabla \phi(x)| d\Omega \quad (5.34)$$

以上の結果を用いて、次式により得られる解を、平衡方程式(5.17)の解として近似することが可能となる．



$$\begin{aligned} \int_D \nabla T \mathbf{k} \nabla \tilde{T} H(\phi) d\Omega + \int_D h T \tilde{T} \frac{dH(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega = \\ \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_D h T_{amb} \tilde{T} \frac{dH(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega \end{aligned} \quad (5.35)$$

本章では，式(5.35)に基づき温度場を解く．

### 5.1.7 感度解析

次に，上の最適化問題に関するKKT条件を導くとともに，目的汎関数  $F(\Omega_d)$  の感度解析を行う．上述の定式化より，ラグランジュアン  $\bar{F}(\Omega_d)$  はラグランジュ乗数  $\lambda$ ，熱，構造の支配方程式(5.17), (5.18)を用いて以下のように記述できる．

$$\begin{aligned} \bar{F}(\Omega(\phi)) = & \\ & -w \left( \frac{1}{2} a_t(T, T) - L_t(T) \right) - (1-w) \left( \frac{1}{2} a_u(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L_u(\mathbf{u}) \right) \\ & + c_1 \left( a_t(T, \tilde{T}) - L_t(\tilde{T}) \right) + c_2 \left( a_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L_u(\mathbf{v}) \right) + \lambda G(\Omega(\phi)) \end{aligned} \quad (5.36)$$

ここで， $c_1$  および  $c_2$  は，任意の定数であり，本研究では， $c_1 = w$ ， $c_2 = 1 - w$  を用いる．式(5.36)を用いてKKT条件を導けば，次式となる．

$$\begin{aligned} \delta \bar{F}(\Omega_d(\phi)) &= 0, \\ a_t(T, \tilde{T}) - L_t(\tilde{T}) &= 0, \quad a_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L_u(\mathbf{v}) = 0, \\ \lambda_m G(\Omega_d(\phi)) &= 0, \quad \lambda_m \geq 0, \quad G(\Omega_d(\phi)) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

ここで，随伴温度場  $\tilde{T}$  および随伴変位場  $\mathbf{v}$  を次式で定義する．

$$a_t(\tilde{T}, T) = L_t(T) \quad \text{for } T \in U_t \quad (5.38)$$

$$a_u(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = L_u(\mathbf{u}) \quad \text{for } \mathbf{u} \in U_u \quad (5.39)$$

これにより，随伴温度場  $\tilde{T}$  および随伴変位場  $\mathbf{v}$  は，式(5.17), (5.18)で定義される  $T$  および  $\mathbf{u}$  と同一の支配方程式を満足することになるので，最適化問題が自己随伴問題になっていることを注記しておく．

式(5.36)に式(5.38)，(5.39)を代入し，近似された平衡方程式 (5.28)，(5.35)および体積制

約(5.29)を用いれば，ラグランジュアン  $\bar{F}(\Omega_d(\phi))$  は次式となる．

$$\begin{aligned}\bar{F}(\Omega_d(\phi)) &= \frac{1}{2} w a_t(T, \tilde{T}) + \frac{1-w}{2} a_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda G(\Omega_d(\phi)) \\ &= \int_D \left( \frac{1}{2} w \nabla T \mathbf{k} \nabla \tilde{T} H(\phi) + \frac{1}{2} w h T \tilde{T} \frac{dH(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| + \frac{1-w}{2} \sigma(\mathbf{u}(T)) : \varepsilon(\mathbf{v}) H(\phi) + \lambda H(\phi) \right) d\Omega\end{aligned}\quad (5.40)$$

したがって，ラグランジュアンの感度となる  $\bar{f}(\mathbf{x})$  は次式となる．

$$\begin{aligned}\bar{f}(\mathbf{x}) &= \\ &= \frac{1}{2} w \nabla T \mathbf{k} \nabla \tilde{T} H(\phi) + \frac{1}{2} w h T \tilde{T} \frac{dH(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| + \frac{1-w}{2} \sigma(\mathbf{u}(T)) : \varepsilon(\mathbf{v}) H(\phi) + \lambda H(\phi)\end{aligned}\quad (5.41)$$

### 5.1.8 最適化アルゴリズム

図 5.2 に最適化のフローチャートを示す．最初に適当な初期構造を示すレベルセット関数  $\phi$  を与える．次に有限要素法を用いて，温度場  $T$  を求める．この温度場を境界条件として，変位場を解く．ここで得られた温度場と変位場を用いて，目的関数と感度を計算する．ここで，目的関数が収束していれば，最適解が得られたとして最適化を終了する．そうでなければ，レベルセット関数を更新し，再度温度場を解析するステップに戻る．以上の手続きにより，最適構造を示すレベルセット関数値を得る．

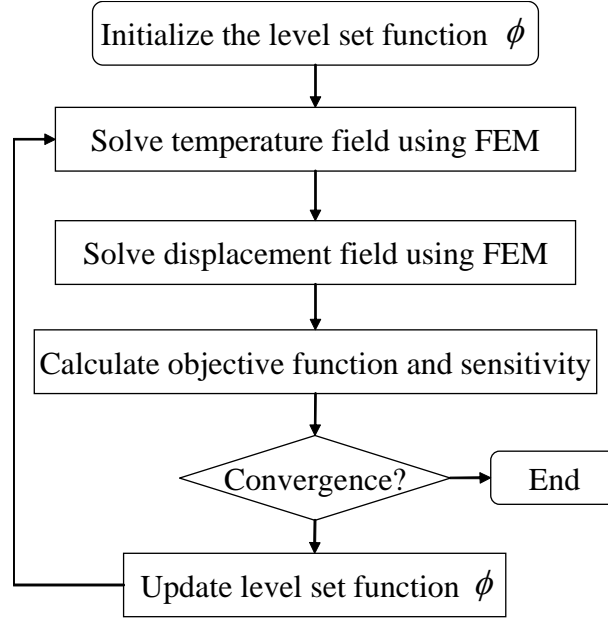


Fig.5.2 Flowchart of optimization method

### 5.1.9 時間発展方程式の数値解法

まず，式(5.12)を時間方向に対して，次式に示すように差分法による離散化を行う．

$$\begin{cases} \frac{\phi(t+\Delta t) - K(\phi(t))\tau \nabla^2 \phi(t+\Delta t)}{\Delta t} = -K(\phi(t))\bar{C}\bar{f}(\mathbf{x},t)H(\phi,t) + \frac{\phi(t)}{\Delta t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \quad (5.42)$$

ここで， $\Delta t$  は時間差分を示す．次に，有限要素法を用いて，空間方向に離散化するために，式(5.42)の弱形式を導出すれば次式となる．

$$\begin{cases} \int_D \frac{\phi(t+\Delta t)}{\Delta t} \tilde{\phi} dD + \int_D \nabla^T \phi(t+\Delta t) (\tau K(\phi(t)) \nabla \tilde{\phi}) dD \\ = \int_D (-K(\phi(t))\bar{C}\bar{f}(\mathbf{x},t)H(\phi,t) + \frac{\phi(t)}{\Delta t}) \tilde{\phi} dD \\ \text{for } \forall \tilde{\phi} \in \tilde{\Phi} \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (5.43)$$

ここで， $\tilde{\Phi}$  は次式で定義されるレベルセット関数に関する関数空間である．

$$\tilde{\Phi} = \left\{ \phi \in H^1(D) \text{ with } \phi=1 \text{ on } \partial D_N \right\} \quad (5.44)$$

式(5.43)を，有限要素法を用いて離散化すれば次式となる．

$$\begin{cases} \mathbf{T}\Phi(t+\Delta t)=\mathbf{Y} \\ \phi=1 \quad \text{on} \quad \partial D_N \end{cases} \quad (5.45)$$

ここで， $\Phi(t)$  は時刻  $t$  における各節点のレベルセット関数値により構成されるベクトルであり，マトリックス  $\mathbf{T}$  およびベクトル  $\mathbf{Y}$  は，次式で与えられる．

$$\mathbf{T} = \bigcup_e \int_{V_e} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{N}^T \mathbf{N} + \nabla^T \mathbf{N} K(\phi(t)) \tau \nabla \mathbf{N} \right) dV_e \quad (5.46)$$

$$\mathbf{Y} = \bigcup_e \int_{V_e} \left( -K(\phi(t)) \bar{C} \bar{f}(\mathbf{x}, t) H(\phi, t) + \frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \right) \mathbf{N} dV_e \quad (5.47)$$

## 5.2 数値例による提案手法の検証

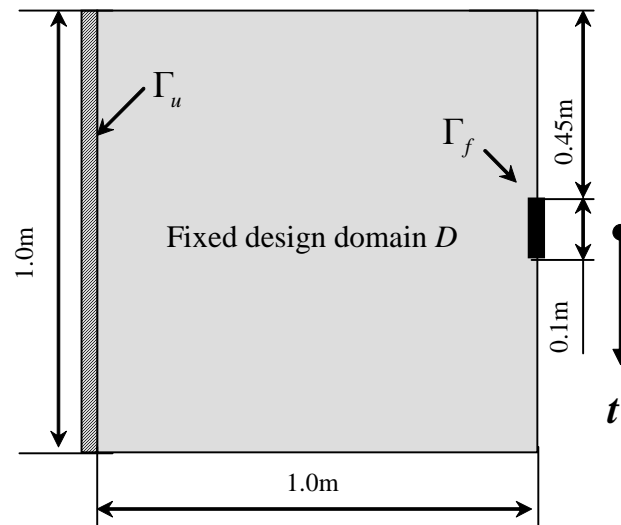
熱を考慮した剛性最大化問題，熱拡散最大化と剛性最大化の二目的最適化問題および構造表面の熱伝達を考慮した二目的最適化問題の 3 つの数値例により，本章で提案する方法論の妥当性を検証する．

なお，温度場と変位場の解析及び，レベルセット関数場の更新には，いずれの場合においても，四節点のアイソパラメトリック四角形要素を用いた．解析モデルの材料は，いずれの場合も等方性材料を想定し，縦弾性係数とポアソン比をそれぞれ 100GPa と 0.27，熱伝導率を 50W/mK，線膨張係数を  $1.25 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$  とし，空洞領域での正の微小値  $d$  を 0.01 と設定した．パラメータ  $C$  は感度を絶対値の平均値で正規化されるように  $C = -0.5 / (|\bar{f}(\mathbf{x}, t)|)$  と設定し，比例定数  $K(\phi)$  は 1 とした．

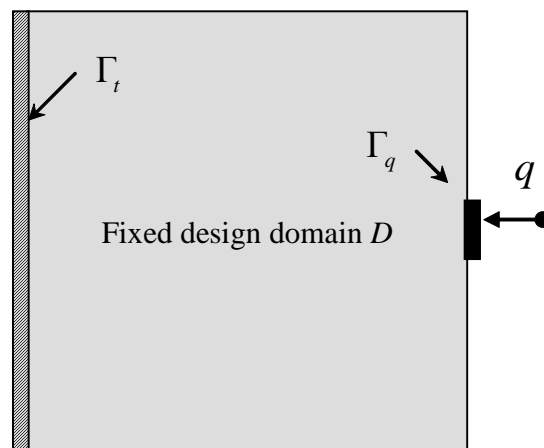
### 5.2.1 熱を考慮した剛性最大化問題

図 5.3 に設計領域を示す．図に示したように設計領域は， $1\text{m} \times 1\text{m}$  の正方形形状とし，体積制約の上限値  $V_{\max}$  は全設計領域の 40%，境界近傍の幅  $l$  は 0.8，複雑度係数  $\tau$  は 0.005 とする．なお本最適設計例では，目的関数(5.16)において，重み付け係数を  $w=0$  に設定し，剛性を最大化する．図 5.3(a)に示すように，構造問題では，設計領域の境界  $\Gamma_u$  を  $u=0\text{mm}$  に固

定し，境界  $\Gamma_f$  に 10N を下方向に与える．熱伝導問題では，図 5.3(b)に示すように，設計領域の境界  $\Gamma_T$  を  $T=0$  に固定し，境界  $\Gamma_q$  に熱流束を与える．ここでは，熱流束の値が最適構造に与える影響を調べるため，熱流束の値として，4 つの場合，すなわち (1)  $q=0\text{W/m}^2$ ，(2)  $q=7 \times 10^{-5}\text{W/m}^2$ ，(3)  $q=1 \times 10^{-4}\text{W/m}^2$ ，(4)  $q=7 \times 10^{-4}\text{W/m}^2$  を与え，それぞれの場合について最適化を行う．なお単純化のため，熱伝導問題と構造問題における  $\Gamma_u$  と  $\Gamma_T$ ，および  $\Gamma_f$  と  $\Gamma_q$  は，固定設計領域における同一の境界とする．要素分割数は  $200 \times 200$  である．



(a) Boundary condition for structural analysis



(b) Boundary condition for heat transfer analysis

Fig.5.3 Design domain for design problem 1

図 5.4 に本研究で提案した最適化手法によって得られた最適構造を示す．なお，図の白黒の濃淡は，黒色が物体領域，白色が空洞領域を示す．なお，後に示す最適構造も同様の方法にて示す．

図 5.4(1)に示すように，熱流束境界条件を与えない場合は，剛性最大化により得られる最適構造となる．一方，図 5.4(2)～(4)に示すように，熱流束の設定値を段階的に増加させると，構造内部にある梁構造が徐々に無くなり，図 5.4(4)では，上側の梁が下部に比べて非常に太いという非対称性を持った最適構造が現れる．本設計問題では，荷重を境界  $\Gamma_f$  において下方向に与えており，この構造の非対称性は，設定した荷重の向きに依存すると考える．このように，熱による変形の考慮の有無で，最適構造として異なる形状が得られることが分かった．

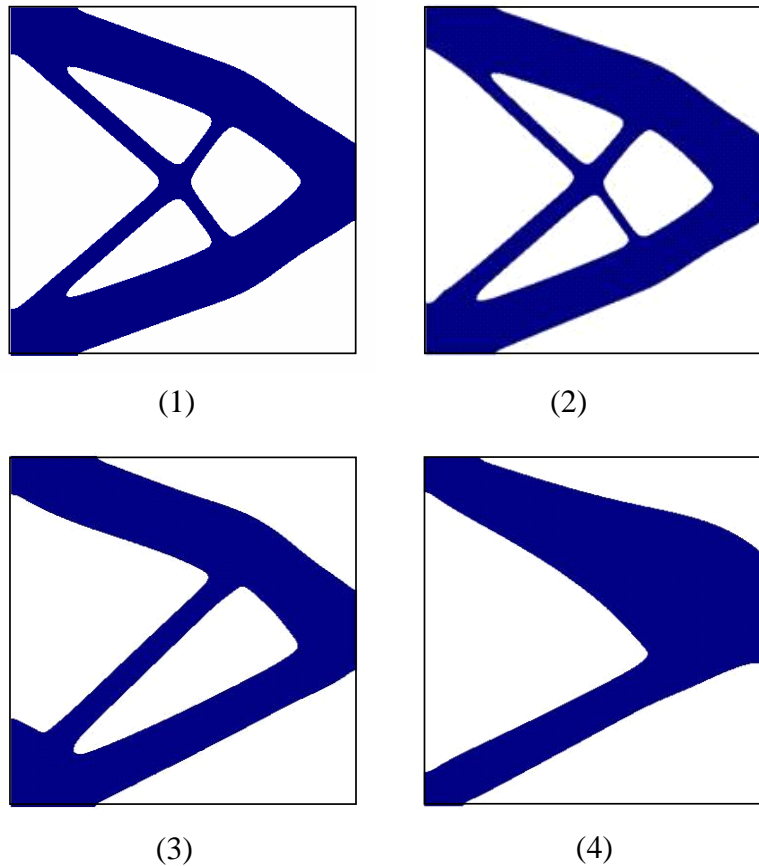


Fig.5.4 Optimal configurations of design problem 1. (1)  $q=0\text{W/m}^2$ , (2)  $q=7 \times 10^{-5}\text{W/m}^2$ , (3)  $q=1 \times 10^{-4}\text{W/m}^2$ , (4)  $5 \times 10^{-4}\text{W/m}^2$

### 5.2.2 熱・構造二目的最適化問題

次に，式(5.15)で定式化した目的関数における重み付け係数  $w$  を変更した場合の最適構造について検証する．図 5.5 に最適化の結果を示す．本例題では，図 5.4(3)における設定条件に加えて，さらに重み付け係数を変更することで最適構造を求める．

図 5.5(1)に示すように， $w=0$  を設定した場合は，最適構造は図 5.4(3)に一致する．それに対して図 5.5(2)に示すように  $w=0.1$  とし，剛性最大化に加え，熱拡散最大化を考慮すると，熱拡散には影響の少ない上下の梁をつなぐ梁が消え， $w=0.5$  とすると，図 5.5(3)に示すように，得られる最適形状は直線形状に近づく．さらに図 5.5(4)に示すように， $w=1$  に設定し，熱拡散最大化のみを考慮した場合は，熱流束境界  $\Gamma_q$  から，温度固定境界  $\Gamma_T$  に伸びる直線構造が得られる．これらいずれの場合も，物理的に妥当な構造が得られていることが分かる

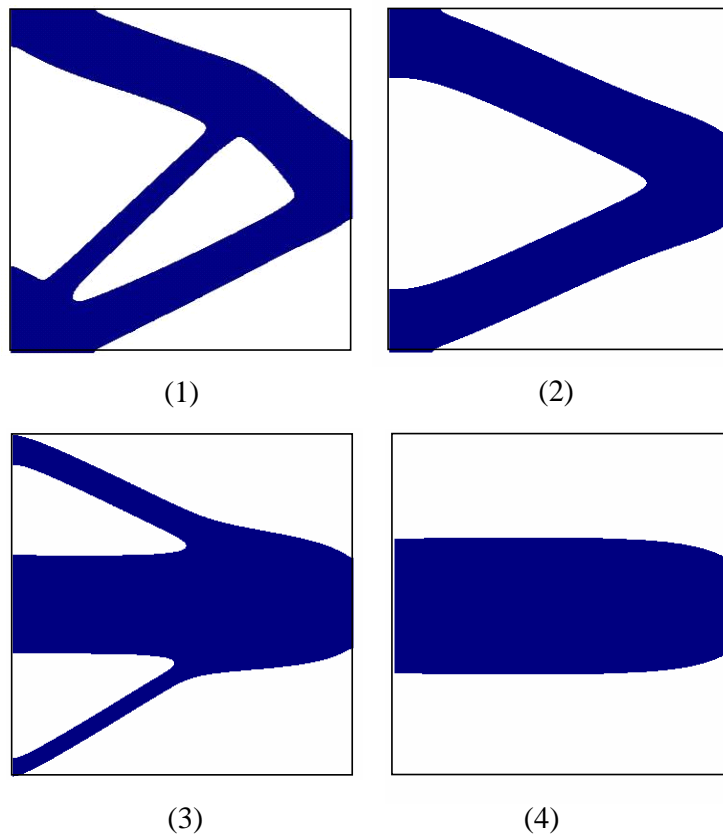
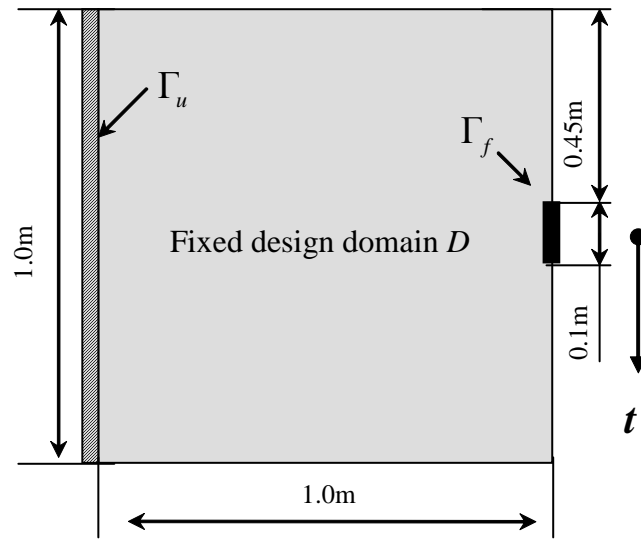


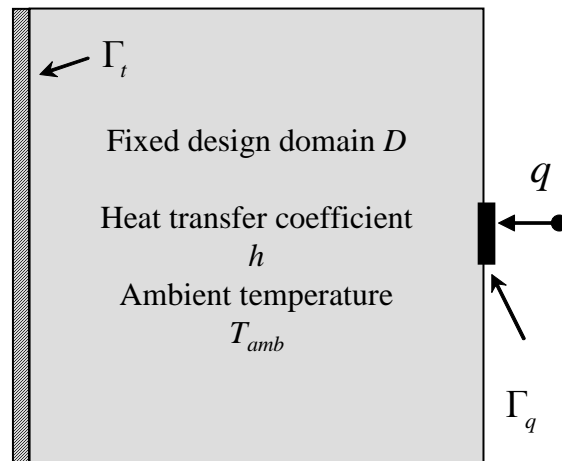
Fig.5.5 Optimal configurations of design problem 2. (1)  $w=0$ , (2)  $w=0.1$ , (3)  $w=0.5$ , (4)  $w=1.0$

### 5.2.3 熱伝達境界を考慮した熱・構造二目的最適化問題

次に，物体境界における熱伝達境界条件を考慮した場合に対して検証を行う．境界条件は，構造問題に対しては，図 5.3(a)と同一とし，熱伝導問題については，図 5.6(b)に示すように，固定設計領域  $D$  内の物体境界  $\Gamma_h$  に，熱伝達係数  $h=10\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ，および周囲温度  $T_{amb}=0$  を設定する．体積制約の上限値  $V_{\max}$  は全設計領域の 40% とする．なお，本例題では，図 5.5(1)～(4)の設計例に対して，式(5.35)を適用し，物体境界の熱伝達条件を設定する．



(a) Boundary condition for structural analysis



(b) Boundary condition for heat transfer analysis

Fig. 5.6 Design domain for design problem 3



図5.7に物体境界の熱伝達を考慮した場合の最適構造を示す．図5.7(1)～図5.7(4)が，図5.5(1)～図5.5(4)の設計問題に対して熱伝達境界を設定し，最適構造を求めた結果に対応する．図に示すように，物体境界に熱伝達境界を設定すると，熱源である熱流束境界 $\Gamma_q$ 近傍が丸みを帯びた構造が得られる．これは熱流束境界近傍の表面積を拡大することにより放熱を促進し，物体の温度を低減するためであり，図5.7(1)～(4)のいずれの場合も，物理的に妥当な最適構造が得られていることが分かる．すなわち，物体境界熱伝達を考慮した場合においても熱拡散と剛性を最大化する最適構造が得られることが分かった．

以上の結果をまとめると，本論文で提唱した方法論により，線形熱弾性体の熱拡散と剛性最大化を目的とした構造最適化が可能であり，物体境界における熱伝達境界がある場合にも，手法の妥当性が検証できたと考える．

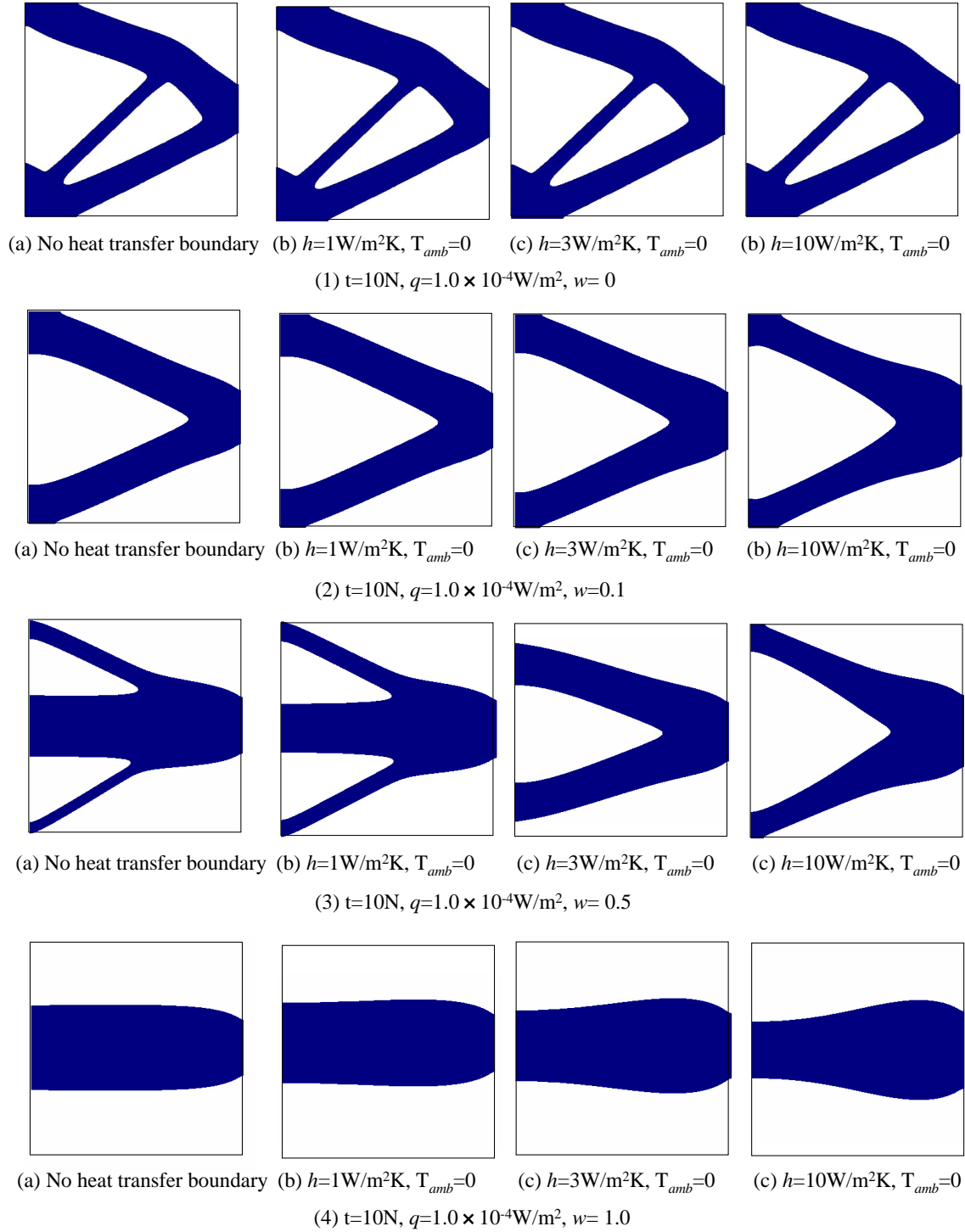


Fig. 5.7 Optimal configurations of design problem 3

### 5.3 まとめ

本章では、レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化において、固定設計領域内の物体境界上の熱伝達境界条件を考慮可能な、熱拡散と剛性の最大化を目的とした、最適化手法を提案するとともに、簡単な最適設計問題により、本章で提案する方法の妥当性を検証した。結果を以下に示す。

- (1) レベルセット法による形状表現に基づく熱・構造問題のトポロジー最適化の定式化を行った。
- (2) 重み付け総和法の考えに基づき、熱、構造の全ポテンシャルエネルギーに重み付け係数を導入することにより、熱拡散および剛性の最大化に関する二目的最適化問題を構築した。
- (3) 上記の定式化に基づき、時間方向の解法に差分法、空間方向の解法に有限要素法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築した。
- (4) 構造物に負荷される熱の影響が最適構造に与える影響を数値実験により検討した結果、熱拡散、剛性の両方の影響を考慮したグレースケールのない明確な構造物を創出することができた。さらに、物体境界に熱伝達境界条件を設定し最適構造を求め、物理的に妥当な構造を得ることができた。

## 第 6 章

### 結論

本論文では、構造最適化手法を適用して、物体境界の熱伝達を考慮した熱弾性体の最適設計手法を提案した。検証に用いた例題は、2 章で示したヘッドの肉厚分布最適化問題以外については、2 次元の簡単な設計例のみを示した。但し、手法自体は他の 3 次元問題に対しても成立する汎用的なものであると考える。

本章では、論文全体の総括と今後の研究課題を示す。

#### 6.1 本論文の総括

- (1) 有限要素法と最適化アルゴリズムを用いて、熱を考慮すべき最適設計問題に対して適用可能な、パラメトリック形状最適化手法を構築した。本手法を、ヘッド燃焼面の肉厚分布最適化問題に適用し、熱応力最小化問題に対して本手法が有効であることを確認した。最適化による有限要素のアップデートには、モーフィング技術を適用し、メッシュ品質の維持および計算効率化が図れた。さらに、形状最適化の初期形状設定に、実験計画法を用いることで、局所最適解に陥る可能性を回避し得ることを示し、より最適な解を得ることができることを確認した。
- (2) 構造物の熱拡散問題に対して、Neumann 型および Dirichlet 型境界条件の両方に対して、目的関数の最大化問題として統一的に扱える全ポテンシャルエネルギーを目的関数として、熱拡散を最大化する均質化法に基づくトポロジー構造最適化手法を提案した。温度固定、熱流束、熱伝達境界の境界条件に対して、熱流束および温度固定境界の範囲および熱伝達係数の値が最適構造へ与える影響を検討するとともに、内部発熱の設定方法と最適構造の関係についても検討を行い、物理的に妥当な最適構造が得られることを確認した。さらに、固定設計領域内の物体境界の抽出方法を構築し、その境界上への熱伝達境界条件の設定方法を提案した。また代理モデルを用いて、熱伝達係数の形状依存性の実験方法を提案し、熱伝達係数の値に応じて物理的に妥当な構造が得られることを確

認した．

- (3) レベルセット法による形状表現を用いて，物体境界の熱伝達条件を考慮可能な，熱拡散と剛性の同時向上を目的とした，トポロジー最適化手法を提案した．本手法では，重み付け総和法の考えに基づき，熱，構造の全ポテンシャルエネルギーに重み付け係数を導入することにより，熱拡散および剛性最大化に関する二目的最適化手法を構築した．そして数値実験により，熱拡散，剛性の両方の影響を考慮したグレースケールのない明確な構造物を創出することができた．さらにこの二目的最適化手法において，物体境界に熱伝達境界条件を設定し最適構造を求め，物理的に妥当な構造を得ることができた．

## 6.2 今後の展望

- (1) 本論文では，物体境界上の熱伝達係数設定に対して，あらかじめ代理モデルを作成し，最適化の過程における密度情報に基づき，最適化のステップごとに熱伝達係数を更新した．つまり，毎回荷重値が変わるため，2次元問題でさえ計算の収束には相当の時間を要した．さらに現実に近い問題を取り扱うためには，熱伝達係数の更新するタイミングを何らかの条件によって定め，計算を安定的かつ短時間に収束させる所作が必要と考える．
- (2) 5章では，レベルセット法による形状表現を用いて，物体境界上の熱伝達条件を考慮可能な構造最適化手法を構築した．但し，境界上に設定する熱伝達係数は，最適化の過程において一定値を与えている．4章で示したように，より現実に近い境界条件を与えるためには，レベルセット法による境界抽出に合わせて，熱伝達係数を更新させる必要があると考える．また将来的には，熱伝達係数の更新を，数値流体解析との連成解析により求めることが考えられる．
- (3) 機械製品に対する，更なる高性能化や軽量化の要望は今後も続くと考ええる．特に内燃機関の

部品であるシリンダヘッドやピストンなど，熱と剛性を同時に検討する必要のある部品に対しては，単一の支配方程式のみに着目するのではなく，熱と構造などの複数の支配方程式と，その間に存在する熱伝達のような相互作用を総合的に検討する必要がある．本論文で述べた熱拡散と剛性の最大化を目的としたトポロジー最適化手法は，現時点では単純な問題への適用にとどまるが，3 次元問題への適用検討や，従来から実設計に適用されている形状最適化とのインテグレーションなどを検討することにより，従来の性能をはるかに改善した構造を創出することも可能になると考えられる．

- (4) 本論文では熱・構造問題について述べてきたが，考え方自体は汎用的なものであり，熱電素子などの熱・電場の連成問題や磁場・構造問題などに対しても成立すると考える．



## 謝辞

本研究を遂行するにあたり，終始温かいご指導を賜りました，京都大学 吉村允孝 名誉教授に感謝の意を表します．同 西脇眞二 教授には，長きにわたり懇切かつ有益なご指導，ご助言を賜りました．ここに深く感謝の意を表します．さらに京都大学大学院工学研究科最適システム設計工学研究室の方々，とくに泉井一浩 助教，山田恭崇 氏，岡本由仁 氏には，ご多忙なか，多くの有益な議論をさせていただきました．厚く御礼申し上げます．

また，このような研究の機会を与えてくださり，終始ご支援をいただきましたヤンマー株式会社に感謝いたします．さらに，研究へのご理解をいただきました，同 常務取締役 荻田広 氏をはじめとする中央研究所の方々，とくに日々励まし，研究活動を支えていただきました，同 基盤研究グループの方々に感謝の意を表します．そして，関連する国際会議発表論文などの執筆にあたり，何度も英文の修正をしていただきました，John. E. Goodman 先生に御礼申し上げます．

関西学院大学 今村勤 名誉教授には，研究に対する基本的な取り組みの姿勢をご教授いただきました．ここに改めて感謝の意を表します．

最後に，学生と社会人の両立に対して，最も理解をしてくれ身近で支えてくれた妻と二人の子供たちに感謝いたします．





## 参考文献

- [1] Martin, R., Heinz, L., Bernd, P., Gerhard, W. and Wilfred, E., Lifetime Simulation of Thermo-Mechanically Loaded Components, *Meccanica* 42 (2007), pp.47-59.
- [2] Puchner, K., Galer, C. and Dannbauer, H., Combining FEM-Optimization and Durability Analysis to Reach Lower Levels of Component Weight, *SAE International*, (2004) 2004-32-0085.
- [3] Schmit, L. A., Structural Design by Systematic Synthesis, *Proceeding of 2nd Conference on Electric Computation ASCE*, New York (1960), pp.105-122.
- [4] Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., Optimum Structural Design –Theory and Application, 1977, *John Wiley & Sons*.
- [5] Bennett, J. A. and Botkin, M. E., Structural Shape Optimization with Geometric Problem Description and Adaptive Mesh Refinement, *AISSJ.*, 23-3 (1985), pp.458-464
- [6] Imam, M. H., Three-Dimensional Shape Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, (1982), pp.661-673.
- [7] Belegundu, A. D. and Rajan, S. D., A Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variables and Shape Function, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 66 (1988), pp.87-106.
- [8] Azegami, H. and Wu, C. Z., Domain Optimization Analysis in Linear Elastic Problems, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series C, 60, (1994), pp.2312-2318.
- [9] Wu, Z. C., Azegami, H., Shimoda, M. and Sakurai, T., Domain Optimization Analysis in Natural Vibration Problems (Mass Minimization Problems), *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series C, 61, (1995), pp.930-937.
- [10] Wu, Z. C., Azegami, H., Domain Optimization Analysis in Frequency Response Problems (Approach Using Traction Method), *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series C, 61, (1995), pp.3968-3975.
- [11] Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, (1988), pp.197-224.
- [12] Suzuki, K. and Kikuchi, N., A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121, (1991), pp.291-318.
- [13] Diaz, A. R. and Kikuchi, N., Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, (1992), pp.1487-1502.

- 
- [14] Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Cheng, H., Topological Design for Vibrating Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121, (1995), pp.259-280.
- [15] E. C. N. Silva, J. S. O. Fonseca, N. Kikuchi, Optimal Design of Periodic Piezocomposites, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 159 (1998), pp.49-77.
- [16] E. C. N. Silva, N. Kikuchi, Design of Piezoelectric Transducers Using Topology Optimization, *Smart Materials and Structures*, 8 (1999), pp.350-364.
- [17] Nishiwaki, S., Min, S., Yoo, J., and Kikuchi, N., Optimal Structural Design Considering Flexibility, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 34, (2001), pp.4457-4504.
- [18] Sigmund, O., On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 25-4, (1997), pp.493-524.
- [19] Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Structural Optimization of Compliant Thermal Actuators Based on the Level Set Method, *Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science*, (2008), 20080007.
- [20] Bendsøe, M. P., Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, 1, (1989), pp.193-202.
- [21] Xie, Y. M. and Steven, G. P., Evolutionary Structural Optimization, (1997), *Springer-Verlag*.
- [22] Cherkaev, A., Variational Method for Structural Optimization, (2000), pp.117-141, *Springer-Verlag*.
- [23] Allaire, G., Shape Optimization by the Homogenization Method, (2002), pp.189-257, *Springer-Verlag*.
- [24] Haslinger, J., Hillebrand, A., Kärkkäinen, T. and Miettinen, M., Optimization of Conducting Structures by Using The Homogenization Method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24, (2002), pp.125-140.
- [25] Li, Q., Steven, G. P., Querin, O. M. and Xie, Y. M., Shape and Topology Design for Heat Conduction by Evolutionary Structural Optimization, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42 (1999), pp.3361-3371.
- [26] Li, Q., Steven, G. P., Xie, Y. M. and Querin, O. M., Evolutionary Topology Optimization for Temperature Reduction of Heat Conduction Fields, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47 (2004), pp.5071-5083.
- [27] Yin, L. and Ananthasuresh, G. K., A Novel Topology Design Scheme for The Multi-physics Problems of Electro-Thermally Actuated Compliant Micromechanism, *Sensors and Actuators*, 97-98 (2002), pp.599-609.
- [28] Rozvany, G. I. N., Aims, Scope, Methods, History and Unified Terminology of Computer-Aided Topology Optimization in Structural Mechanics, *Structural and Multidisciplinary Optimization*,

- 21, (2001), pp.90-108.
- [29] Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., Material Interpolation Schemes in Topology Optimization, *Archive of Applied Mechanics*, 69, (1999), pp.635-654.
- [30] Gersborg-Hansen, A. and Bendsøe, M. P., Topology Optimization of Heat Conduction Problems Using Finite Volume Method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31, (2006), pp.251-259.
- [31] Matsui, K. and Terada, K., Continuous Approximation of Material Distribution for Topology Optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, (2004), pp.1925-1944.
- [32] Rahmatalla, S. and Swan, C. C., A Q4/Q4 Continuum Structural Topology Optimization Implementation, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27, (2004), pp.130-135.
- [33] Chen, B. C. and Kikuchi, N., Topology Optimization with Design-Dependent Loads, *Finite Elements in Analysis and Design*, 37 (2001), pp.57-70.
- [34] Sigmund, O. and Clausen P. M., Topology Optimization Using a Mixed Formulation: An Alternative Way to Solve Pressure Load Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, (2007), pp.1874-1899.
- [35] Bourdin, B. and Chambolle, A., Design-Dependent Loads in Topology Optimization, *Control, Optimization and Calculus of Variations*, 9 (2003), pp.19-48.
- [36] Bruyneel, M. and Duysinx, P., Note on Topology Optimization of Continuum Structures Including Self-Weight, *Structural Multidisciplinary Optimization*, 29 (2005), pp.245-256.
- [37] Turteltaub, S., and Washabaugh, P., Optimal Distribution of Material Properties for an Elastic Continuum with Structure-Dependent Body Force, *International Journal of Solids and Structures*, 36 (1999), pp.4587-4608.
- [38] Yoon, G. H. and Kim, Y. Y., The Element Connectivity Parameterization Formulation for The Topology Design Optimization of Multiphysics System, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 (2005), pp.1649-1677.
- [39] Ryu, J. C. and Kim, Y. Y., Density-Dependent Shape Function Approach for Trouble-Free Topology Optimization for Heat Transfer Problems Including Side Convection, *Proceeding of 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Seoul, Korea, May 21-25, (2007).
- [40] Bruns, T. E., Topology Optimization of Convection-Dominated, Steady-State Heat Transfer Problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 (2007), pp.2859-2873.
- [41] Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A Level Set Method For Structural Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, No.1-2 (2003), pp. 227-246.
- [42] Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A., Structural Optimization Using Sensitivity Analysis And A

- Level-Set Method, *Journal of Computational Physics*, 194, No.1 (2004), pp.363-393.
- [43] Xia, Q. and Wang, S. Y., Topology Optimization for Thermoelastic Structures Using Level Set Method, *Computational Mechanics*, 42 (2008), pp.837-857.
- [44] Yamada, T., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M. and Takezawa, A., A Structural Optimization Method Incorporating Level Set Boundary Expressions Based on The Concept of The Phase Field Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, (submitted).
- [45] Kuroda, Y., Iga, A. and Sheo, K., Consideration on Regard to Fatigue Safety Life in Operating Condition of Diesel Engine Cylinder Head, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, 70, (1994), pp.1890-1898.
- [46] Hashin, Z. and Shtrikman, S., Variational Approach to The Theory of The Elastic Behavior of Multiphase Material, *J. Mech. Phys. Solids*, 11 (1963), pp.127-140.
- [47] Michel, J. G., Moulinec, H. and Squet, P., Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [48] Terada, K. and Kikuchi, N., A Class of General Algorithms for Multi-Scale Analyses of Heterogeneous Media, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 (2001), pp.5427-5464.
- [49] Fujii, D. and Kikuchi, N., Improvement of Numerical Instabilities in Topology Optimization Using SLP Method, *Structural Optimization*, 19 (2000), pp.113-121.
- [50] Blaise, B., Filters in topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 (2001), pp.2143-2158.
- [51] Haber, R. B., Jog, C. S. and Bendsøe, M. P., A New Approach to Variable-Topology Shape Design Using a Constraint on Parameter, *Structural Optimization*, 11 (1996), pp.1-12.
- [52] Dittus, E. W. and Boelter, L. M. K., Heat Transfer in Automobile Radiators of The Tubular Type, *University of California, Publications in Engineering*, 2, No. 13, (1930), pp.443-461.
- [53] FLUENT 6.3 Documentation, *ANSYS, Inc.*, (2007).
- [54] E. F. Gregorv, Meshfree Approximation Methods with MATLAB, (2007), pp.53-61, *World Science*.
- [55] Diaz, A. R. and Benard, A., Topology Optimization of Heat Resistant Structures. *Proceedings of DETC'03, ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences*, Chicago, Illinois, September (2003), pp.2-6.
- [56] Osher, S. and Fedkiw, R., Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces (2003), pp.14-15, *Springer*.
- [57] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, J., A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow, *Journal of Computational Physics* (1994), pp.144-146.

- 
- [58] Sethian, J. A., *Level Set Method and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Material Science*, Cambridge University Press, (1999).
- [59] Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., A Study of Boundary Settings in The Design Domain for Structural Optimization Based on The Level Set Method, *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, 18, No.3 (2008), pp.487-505.
- [60] Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., Structural Optimization for Compliant Thermal Actuators Based on the Level Set Method, *Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science*, (2008), No.20080007.
- [61] Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., Structural Optimization of Micro-Actuators Utilizing Thermal Deformation Based on the Level Set Method Using Topological Derivatives, *Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science*, 13, No.1(2008-5), pp.477-480.



## 関連学術論文

- [1] 伊賀淳郎，西脇眞二，泉井一浩，吉村允孝，材料分布の連続性を仮定した熱拡散問題のトポロジー最適化，日本機械学会論文集(C 編)，73 巻 733 号(2007), pp.2426-2433.
- [2] 伊賀淳郎，西脇眞二，泉井一浩，吉村允孝，設計変数依存性を考慮した熱伝達問題に対するトポロジー最適化，日本機械学会論文集(C 編)，74 巻 746 号(2008), pp.2452-2461.
- [3] Iga, A., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Topology Optimization for Thermal Conductors Considering Design-Dependent Effects, Including Heat Conduction and Convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52 (2009), pp.2721-2732.
- [4] 岡本由仁，泉井一浩，伊賀淳郎，山田恭崇，西脇眞二，吉村允孝，熱電効果を考慮した熱伝導問題に関するトポロジー最適化，日本計算工学会論文集，(2009), 20090005.
- [5] 山田恭崇，西脇眞二，伊賀淳郎，泉井一浩，吉村允孝，レベルセット法による形状表現を用いた熱拡散最大化問題のトポロジー最適化，日本機械学会論文集(C 編)，投稿中.
- [6] 伊賀淳郎，山田恭崇，西脇眞二，泉井一浩，吉村允孝，レベルセット法を用いた熱構造連成問題に対するトポロジー最適化，日本機械学会論文集(C 編)，投稿中.

## 国際会議発表論文

- [1] Iga, A., Kuroda, Y., The Investigation of The Thermal Behavior for The High Speed Diesel Engine Cylinder Head, *Conseil International Des Machines a Combustion 2004 (CIMAC2004)*, June 8-10, (2004), Kyoto, Japan, CIMAC2004-152.
- [2] Iga, A., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Topology Optimization for Thermal Problems Considering Design-Dependent Heat Convection Loads, *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-7)*, May 21-25, (2007), Seoul, Korea, pp.2163-2171.
- [3] Iga, A., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Topology Optimization for Steady-State Heat Transfer Problems Including Design-Dependent Effects, *ASME Computers and Information in Engineering Conference 2008 (IDETC/DAC 2008)*, August 3- 6, (2008), New York City, USA, DETC2008-49582.



## 口頭発表論文

- [1] 伊賀淳郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 熱伝達・熱伝導問題におけるトポロジー最適化, 第7回最適化シンポジウム, 日本機械学会, 2006年12月, 兵庫, 日本, pp.155-160.
- [2] Iga, A., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Topology Optimization for Thermal Problems Including Design-Dependent Heat Convection Loads, *8<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)*, June 30- July 4, (2008), Venice, Italy.
- [3] 伊賀淳郎, 川上直樹, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, エンジンシリンダヘッドの温度分布を考慮した形状最適化, 第18回設計工学・システム部門講演会, 日本機械学会, 2008年9月, 京都, 日本.

# 索引

## A

ABAQUS -----17

## B

Biot -----81

Boelter -----65

## C

CAMD -----41

## D

Dittus -----65

DOE -----24

## E

ECP -----8

ESO -----7

## H

Hamilton-Jacobi -----89

## I

iSIGHT -----21

## M

MMFD -----21

Manson-Coffin -----17

## O

Out of phase -----16

## R

R.B.F. -----68

## S

SIMP -----6

SLP -----45,71

## か

界面エネルギー -----85

仮想仕事の原理 -----35

ガトー微分 -----36

均質化法 -----6,32,33

形状最適化 -----13

固定設計領域 -----6,30,87

## さ

シリンダヘッド -----13

全ポテンシャルエネルギー -----43,60

双一次関数 -----41,64

## た

ディーゼルエンジン -----1

チェッカーボード -----40

特性関数 -----6

## な

二目的最適化 -----91

## は

フィルタリング -----40

フェイズフィールド法 -----88

ペリメータコントロール -----40

## ま

マイクロストラクチャ -----33

マルチスケール -----33

モーフィング -----18

## や

ユニットセル -----33,38

